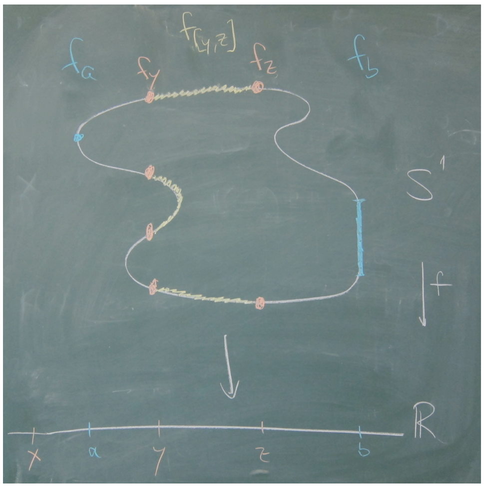
WAS IST KOBORDISMUS?

JUN.-PROF. WOLFGANG STEIMLE

Wir beginnen mit der folgenden Behauptung: Sei $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ und $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ eine glatte (= beliebig oft differenzierbare) Abbildung. Dann hat für "praktisch alle" $x \in \mathbb{R}$ das Urbild $f_x := f^{-1}(x)$ eine *gerade* Anzahl von Elementen.

Hier ist ein Beispiel:



Der geschwungene Kreis im Bild ist eine (etwas deformierte) S^1 und die Abbildung f ist die Projektion nach unten. Wir sehen, dass für die meisten x gilt $f_x = \emptyset$ (denn S^1 ist kompakt und hat also ein beschränktes Bild). Dagegen hat y 4 Urbilder und z hat 2 Urbilder. Zwar ist $|f_a| = 1$ und $|f_b| = \infty$, aber das sind nur wenige "irreguläre" Ausnahmen.

Das Bild liefert auch schon die Begründung für unsere Beobachtung: Das Urbild $f_{[y,z]} := f^{-1}([y,z])$ ist ein 1-dimensionales Kontinuum (eine kompakte 1-dimensionale Mannigfaltigkeit), deren Rand gerade aus f_y und f_z besteht. Wir sagen, $f_{[y,z]}$ ist ein *Kobordismus* zwischen f_y und f_z. Nun ist bekannt (und nicht gerade überraschend), dass jede kompakte 1-dimensionale Mannigfaltigkeit eine (endliche) Vereinigung von Kreisen und Intervallen ist und somit eine gerade Anzahl von Randpunkten hat. Also ist $|f_y| + |f_z| \equiv 0 \mod 2$, also

$$|f_y| \equiv |f_z| \mod 2$$

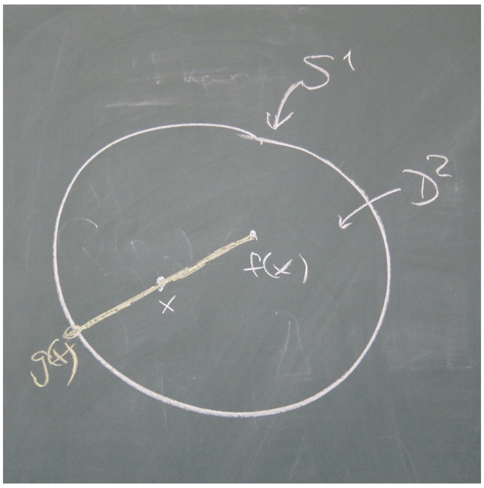
wie behauptet.

Dieses intuitive Argument kann mathematisch präzise gemacht werden. Dazu muss man sich überlegen, was genau die Bedingung an y und z ist, dass $f_{[y,z]}$ eine Mannigfaltigkeit ist und warum für "praktisch alle" y, z diese Bedingung erfüllt ist – das Schlüsselwort hier heißt *Transversalität* und ist eines der wichtigsten Konzepte der Differentialtopologie.

Die Idee in der Kobordismentheorie ist also, Abbildungen zu studieren, indem man sich Urbilder von Punkten anschaut (wobei man natürlich die "irregulären" Punkte wie a und b vermeiden muss). Im folgenden Beispiel zeigt sich, dass dies mehr als nur Spielerei ist. Sei $D^2 = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| \leq 1\}$ die Einheitskreisscheibe.

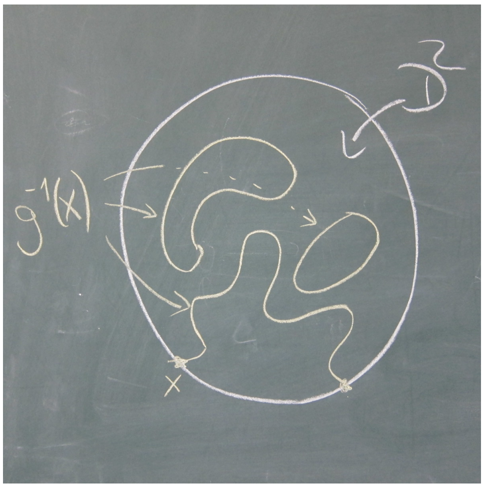
Theorem 1 (Brouwerscher Fixpunktsatz)**.** *Jede glatte Abbildung* $f\colon D^2 \to D^2$ *hat einen Fixpunkt.*[1]

Das heißt, es gibt $x \in D^2$ mit $f(x) = x$. Der Beweis verläuft durch Widerspruch: Sei f eine Abbildung ohne Fixpunkt. Dann konstruieren wir eine Abbildung $g\colon D^2 \to S^1$ wie in folgendem Bild.



Wir nehmen also den Strahl von $f(x)$ durch x und definieren $g(x)$ als den Schnittpunkt des Strahls mit dem Einheitskreis. Offenbar gilt $g(x) = x$ für $x \in S^1$. Außerdem kann man recht leicht zeigen, dass g glatt ist, falls f glatt war. (Ein solches g heißt (glatte) *Nullhomotopie* der Identitätsabbildung auf S^1.)

Das heißt, eine glatte fixpunktfreie Selbstabbildung f von D^2 liefert uns eine glatte Nullhomotopie g von id_{S^1}, und wir zeigen nun, dass so ein g nicht existieren kann. Wir wählen nun wieder einen "regulären" Punkt $x \in S^1$ und schauen uns das Urbild $g^{-1}(x)$ an. Regularität bedeutet wie oben, dass $g^{-1}(x)$ eine kompakte Mannigfaltigkeit ist, automatisch der Dimension 1, und deren Randpunkte gerade auf der S^1 liegen. Ein Urbild könnte etwa so aussehen:



Wir wissen, dass mindestens ein Punkt von $g^{-1}(x)$ auf S^1 liegt – nämlich x selbst, weil g auf dem Rand ja die Identität ist. Weil aber der Rand von $g^{-1}(x)$

[1] Die Aussage gilt für alle stetigen Abbildungen. Tatsächlich man eine stetige Abbildung "beliebig gut" durch eine glatte Abbildung approximieren und insbesondere bekäme man aus einer stetigen fixpunktfreien Abbildung eine glatte fixpunktfreie Abbildung, die nach diesem Satz nicht existieren kann.

eine gerade Anzahl von Elementen hat, gibt es also noch ein anderes $y \in S^1$, das in $g^{-1}(x)$ liegt, also mit $g(y) = x$. Das steht aber im Widerspruch zu $g(y) = y$.

Anders ausgedrückt: Eine Nullhomotopie von id_{S^1} liefert eine Berandung $g^{-1}(x)$ von $(\mathrm{id}_{S^1})^{-1}(x) = \{x\}$. Wir interpretieren eine Berandung auch als Kobordismus zwischen $\{x\}$ und der leeren Menge und nennen das *Nullbordismus* von $\{x\}$. Aber $\{x\}$ ist eben nicht nullbordant, weil es eine ungerade Anzahl von Elementen hat.

Nun kann man mutig sein und versuchen, mit dieser Methode auch Abbildungen zwischen Räumen unterschiedlicher Dimension zu untersuchen. Pontryagin hat dies als erster für die *Hopf-Abbildung*

$$H\colon S^3 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\} \to S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$
$$(z,w) \mapsto z/w$$

getan. (S^2 ist die Riemannsche Zahlenkugel aus der komplexe Analysis.)

Theorem 2. *Die Hopf-Abbildung ist nicht die Einschränkung einer glatten Abbildung $D^4 \to S^2$.*[2]

Versuchen wir, diesen Satz mit der obigen Strategie zu beweisen. Zunächst einmal ist schnell einzusehen, dass H surjektiv ist. Ist außerdem (z,w) ein Urbild von x, so auch $(\lambda z, \lambda w)$ für $\lambda \in S^1$, und tatsächlich sind das alle Urbilder. Das heißt, wir können $H^{-1}(x)$ mit S^1 identifizieren. (Insbesondere sind *alle* Werte x regulär.) Nehmen wir zum Beispiel $x = 0 \in \mathbb{C} \subset S^2$, dann ist $H^{-1}(x) = \{(\lambda, \lambda) \mid \lambda \in S^1\}$.

Sei $K\colon D^4 \to S^2$ eine hypothetische Nullhomotopie von H. Das Urbild $K^{-1}(x)$ ist dann eine kompakte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit M, deren Rand gerade in S^3 liegt und mit $H^{-1}(x)$ übereinstimmt, also ein Nullbordismus von $H^{-1}(x)$. Wir würden das Argument gerne fortsetzen, dass $H^{-1}(x)$ nicht nullbordant ist, aber das ist leider falsch – schließlich wird $H^{-1}(x) = S^1$ von D^2 berandet.

Hier muss man also schon sehr viel genauer hinschauen, um zum Widerspruch zu gelangen. Wir skizzieren zumindest die Idee, für die man allerdings etwas mehr Theorie benötigt. Der Punkt ist, dass das Urbild $H^{-1}(x)$ *zwei linear unabhängige Vektorfelder* besitzt, die *normal* zu $H^{-1}(x) \subset S^3$ stehen. Wir nehmen nämlich einfach zwei linear unabhängige Tangentialvektoren X und Y bei x (das geht, denn S^2 ist ja 2-dimensional) und wählen bei jedem $y \in H^{-1}(x)$ die zwei Normalenvektoren, die unter H auf X und Y abbilden. Am Beispiel $x = 0$ kann man sich klar machen, das die beiden Vektorfelder "mitrotieren", wenn man λ den Einheitskreis durchlaufen lässt.

Gäbe es nun K, so müsste auch $K^{-1}(x)$ zwei linear unabhängige Vektorfelder in Normalenrichtung besitzen, die dieses "mitrotierende" Vektorfeld erweitern. Dieses Mal kann man jedoch argumentieren, dass ein Nullbordismus mit dieser Zusatzeigenschaft nicht existieren kann. (Hier kommt wieder ins Spiel, dass es keine Nullhomotopie der Identität auf S^1 gibt.)

Soweit die Motivation. In der Vorlesung soll es darum gehen, diese Überlegungen mathematisch präzise zu machen und insbesondere die Konzepte von Transversalität und Tangential- und Normalenbündel einzuführen. Weiter sollen Kobordismusgruppen definiert werden und gezeigt werden, dass Kobordismus zu einer *Homologietheorie* führt: Dies ist eine Serie von abelschen Gruppen $\Omega_n(X)$ für topologische Räume X, die eine erfreuliche Anzahl schöner Rechenregeln erfüllt. Gegen

[2] In der Sprache der Homotopietheorie definiert die Hopfabbildung ein Element $H \in \pi_3(S^2)$, der dritten *Homotopiegruppe* der S^2 und der Satz impliziert, dass dieses Element nicht null ist. Also ist $\pi_3(S^2) \neq 0$ – im Gegensatz zu $H_3(S^2) = 0$ für die dritte *Homologiegruppe* von S^2. Bis heute ist es ein schweres Problem, Homotopiegruppen von Sphären zu bestimmen. Siehe Wikipedia für mehr Informationen und eine Tabelle von bekannten Homotopiegruppen.

Ende der Vorlesung werden wir sehen, dass die oben beschrieben Strategie

$$\text{reguläres Urbild}\colon \text{Abbildungen}(+\text{Nullhomotopien}) \\ \to \text{Mannigfaltigkeiten}(+\text{Nullkobordismen})$$

in gewissem Sinne ein Umkehrung besitzt (die sogenannte *Pontryagin–Thom Konstruktion*) – somit kann man nicht nur Abbildungen durch Kobordismen untersuchen, sondern umgekehrt auch Kobordismen durch Abbildungen. René Thom hat dies als erster auf spektakuläre Weise ausgenutzt, um zu sagen, wie viele verschiedene Mannigfaltigkeiten es bis auf Kobordismus gibt – bis heute ist Kobordismus die "berechenbarste" Relation unter Mannigfaltigkeiten, die geometrisch interessant ist.

E-mail address: steimle@math.uni-leipzig.de
URL: http://www.math.uni-leipzig.de/people/steimle