EINFÜHRUNG IN DIE TOPOLOGIE
(SS 2012)

BERNHARD HANKE

16.4.12

1. Metrische Räume und topologische Räume

Definition 1.1. *Ein* metrischer Raum *ist ein Paar* (X, d) *bestehend aus einer Menge* X *und einer Abbildung*

$$d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

mit den folgenden Eigenschaften: Für alle $x, y, z \in X$ *gilt*

- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(Dreiecksungleichung).*

Wichtige Beispiele sind der euklidische Raum $(\mathbb{R}^n, d)$ mit der euklidischen Metrik $d(x, y) := \|x - y\|$ oder auch Funktionenräume wie $(C([0, 1], \mathbb{R}), d)$, die Menge der stetigen Abbildungen $[0, 1] \to \mathbb{R}$ versehen mit der Metrik

$$d(f, g) := \max_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)| .$$

Ist (X, d) ein metrischer Raum, so trägt jede Teilmenge $A \subset X$ eine (durch Einschränkung von d gegebene) *induzierte* Metrik.

In metrischen Räumen kann das Konzept einer stetigen Funktion bekanntlich mittels des $\epsilon - \delta$-Kriteriums definiert werden:

Definition 1.2. *Es seien* (X, d_X), (Y, d_Y) *metrische Räume. Eine Abbildung* $f : X \to Y$ *heißt* stetig, *falls für jedes* $x \in X$ *und jedes* $\epsilon > 0$ *ein (in der Regel von* x *abhängiges)* $\delta > 0$ *existiert mit*

$$d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x'), f(x)) < \epsilon .$$

In der Analysis beweist man viele nützliche Sätze für auf Teilmengen von $\mathbb{R}$ definierte stetige reellwertige Funktionen. Als Beispiel verweisen wir auf den Zwischenwertsatz oder die Tatsache, dass jede auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte stetige Funktion $I \to \mathbb{R}$ ihr Maximum und Minimum annimmt. Wir werden unter anderem diese Tatsachen im abstrakteren topologischen Rahmen wiederfinden.

Ist (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$, so definieren wir für alle $\epsilon > 0$ die *offene Kugel um* x mit Radius ϵ

$$B_\epsilon(x) := \{p \in X \mid d(p, x) < \epsilon\} .$$

Definition 1.3. *Eine Teilmenge $U \subset X$ eines metrischen Raumes heißt* offen*, falls für alle $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ existiert mit*

$$B_\epsilon(x) \subset U \,.$$

Folgende Aussage zeigt man leicht mit der Dreiecksungleichung.

Lemma 1.4. *Ist (X,d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $\epsilon > 0$, so ist die offene Kugel $B_\epsilon(x) \subset X$ eine offene Teilmenge des metrischen Raumes (X,d) im Sinne obiger Definition.*

Man beweist nun

Proposition 1.5. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen ist genau dann stetig, falls für alle offenen Teilmengen $U \subset Y$ das Urbild*

$$f^{-1}(U) \subset X$$

offen ist.

Beweis. Sei f stetig und $U \subset Y$ eine offene Teilmenge. Es sei $x \in f^{-1}(U)$. Da U offen ist, existiert ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(f(x)) \subset U$. Wegen der Stetigkeit von f existiert ein $\delta > 0$, so dass $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$. Somit gilt $B_\delta(x) \subset f^{-1}(U)$. Da $x \in f^{-1}(U)$ beliebig war, folgt daraus, dass $f^{-1}(U)$ offen ist.

Sei nun umgekehrt für alle offenen Teilmengen $U \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(U)$ offen. Es seien $x \in X$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Der Ball $B_\epsilon(f(x)) \subset Y$ ist eine offene Teilmenge im Sinne von Definition 1.3 (nach Lemma 1.4). Daher ist nach Voraussetzung $f^{-1}(B_\epsilon(f(x))) \subset X$ offen und wir finden also ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$. Dies ist gleichbedeutend mit $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$. Damit ist die Stetigkeit von f gezeigt. $\square$

Proposition 1.5 legt es nahe, den Begriff der Stetigkeit abstrakter zu fassen und alleine auf den Begriff der offenen Teilmengen abzustellen.

Definition 1.6. *Ein* topologischer Raum *ist ein Paar $(X, \mathcal{T})$ bestehend aus einer Menge X und einer Menge $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X mit den folgenden Eigenschaften.*

- $\emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$,
- $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$,
- $\mathcal{S} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{U \in \mathcal{S}} U \in \mathcal{T}$.

Die Elemente von $\mathcal{T}$ werden offene Teilmengen *von X genannt. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt* abgeschlossen*, falls $X \setminus A$ offen ist.*

Das zweite obige Axiom besagt, dass der Schnitt endlich vieler offener Teilmengen wieder offen ist und das dritte Axiom, dass die Vereinigung beliebig vieler offener Teilmengen wieder offen ist.

Der Begriff des topologischen Raumes ist gerade deshalb so nützlich, weil er in ganz verschiedenen mathematischen Kontexten auftritt und daher Sätze, die wir für topologische Räume beweisen, in der Regel eine breite Anwendung finden.

Man kann auf einer gegebenen Menge X zahlreiche Topologien angeben - die meisten davon sind eher künstlich und unnütz. Zwei extreme Spezialfälle sind die der *diskreten Topologie*, bei der jede Teilmenge von X als offen erklärt wird und die *Klumpentopologie* mit $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.

Man kann leicht zeigen dass die Menge der offenen Teilmengen in einem metrischen Raum (X, d) eine Topologie im obigen Sinne bildet. Wir nennen diese die von der Metrik *induzierte* Topologie.

18.4.12

Definition 1.7. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Die Menge der Schnitte $U \cap A \subset A$, wobei $U \subset X$ offen ist, bildet eine Topologie auf A, die* Unterraumtopologie, *oder von $\mathcal{T}$* induzierte *Topologie.*

Eine Teilmenge $V \subset A$ ist also genau dann offen (abgeschlossen) bezüglich der Unterraumtopologie, falls es eine offene (abgeschlossene) Menge $U \subset X$ gibt mit $U \cap A = V$. Falls X ein metrischer Raum ist und $A \subset X$, so stimmt die Unterraumtopologie auf A mit der Topologie überein, die von A als metrischem Raum (mit der Metrik von X) induziert ist.

Man kann fragen, ob auf einem gegebenen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ eine Metrik existiert, so dass die von der Metrik induzierte Topologie mit $\mathcal{T}$ übereinstimmt. Falls dies der Fall ist, so nennen wir den topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ *metrisierbar*. Allerdings ist nicht jeder topologische Raum ist metrisierbar - wir werden in Kürze ein notwendiges Kriterium für Metrisierbarkeit kennenlernen.

Definition 1.8. *Ein topologischer Raum X heißt* Hausdorffsch, *falls für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ offene Teilmengen U und V von X existieren, so dass $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.*

Falls X mehr als einen Punkt enthält, so ist die Klumpentopologie nicht Hausdorffsch. Damit ist diese auch nicht metrisierbar, denn es gilt

Proposition 1.9. *Jeder metrisierbare topologische Raum ist Hausdorffsch.*

Beweis. Sind $x, y \in X$ zwei verschiedene Punkte, so setze $d := d(x, y)$. Die offenen Kugeln um x und y mit Radius $d/2$ sind nach der Dreiecksungleichung disjunkt. $\square$

Später in der Vorlesung werden wir auch hinreichende Bedingungen für die Metrisierbarkeit eines topologischen Raumes kennenlernen.

Wir können nun den Stetigkeitsbegriff von metrischen Räumen auf allgemeine topologische Räume verallgemeinern.

Definition 1.10. *Es seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt* stetig *falls für jede offene Menge $U \subset Y$ das Urbild*

$$f^{-1}(U) \subset X$$

wieder offen ist. Eine bijektive stetige Abbildung $f : X \to Y$ mit stetiger Inverser $f^{-1} : Y \to X$ heißt Homöomorphismus. *Sind X und Y homöomorph, so schreiben wir auch $X \approx Y$.*

Ist X ein topologischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge und $f : X \to Y$ stetig, so ist die Einschränkung $f|_A : A \to X$ ebenfalls stetig. Die Komposition stetiger Abbildungen ist stetig.

Es ist leicht, Beispiele für stetige, bijektive Abbildungen anzugeben, die keine Homöomorphismen sind. Die Homömorphismen spielen in der Topologie die gleiche Rolle wie die linearen Isomorphismen in der linearen Algebra, die biholomorphen Abbildungen in der Funktionentheorie, die Gruppenisomorphismen in der Gruppentheorie, die Isometrien in der Riemannschen Geomtrie, etc. Eines der Grundprobleme der Topologie lässt sich wie folgt formulieren: Es seien topologische Räume X und Y gegeben. Entwickle Methoden, die es erlauben zu entscheiden, ob X und Y homöomorph sind oder nicht.

Insbesondere die algebraische Topologie entwickelt effektive Hilfsmittel, diese Frage zu entscheiden. Ein prominentes Resultat in diese Richtung lautet:

Satz 1.11. *Für $n \neq m$ sind die topologischen Räume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ (mit der von den von den jeweiligen Metriken induzierten Topologien) nicht homöomorph.*

In dieser Vorlesung werden wir diesen Satz für $n = 2$ zeigen. Im Zusammenhang mit topologischen Räumen müssen wir noch einige Vokabeln einführen.

Sind $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}'$ Topologien auf einem Raum X und gilt $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$, d.h. jede bzgl. $\mathcal{T}$ offene Teilmenge ist auch offen bzgl. $\mathcal{T}'$, so nennen wir $\mathcal{T}$ *gröber* als $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}'$ *feiner* als $\mathcal{T}$. Damit ist die Klumpentopologie die gröbste und die diskrete Topologie die feinste Topologie auf X.

Definition 1.12. *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Menge $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ von offenen Teilmengen von X heißt* Basis *der Topologie, falls jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist. Wir nennen $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ eine* Subbbasis *der Topologie, falls jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ Vereinigung von Mengen ist, von denen jede Schnitt endlich vieler Mengen aus $\mathcal{B}$ ist.*

Sind X und Y topologische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{B}$ eine Subbasis der Topologie auf Y, so ist f genau dann stetig, falls $f^{-1}(U) \subset X$ offen ist für alle $U \in \mathcal{B}$.

In jedem metrischen Raum bilden die offenen Kugeln eine Basis der von der Metrik induzierten Topologie. Wir können uns im $\mathbb{R}^n$ sogar auf die Kugeln mit rationalen Mittelpunkten und rationalen Radien beschränken. Damit hat die Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$ sogar eine abzählbare Basis.

Ist X eine Menge (zunächst ohne Topologie), so ist nicht jede Menge $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ Basis einer Topologie auf X (denn $\mathcal{B}$ muss nicht abgeschlossen unter endlichen Schnitten sein). Jedoch ist $\mathcal{B}$ auf jeden Fall Subbasis einer

Topologie $\mathcal{T}$ von X, die wir die von $\mathcal{B}$ *erzeugte* Topologie nennen wollen. Die Elemente von $\mathcal{T}$ sind genau die Teilmengen von X, die sich als Vereinigung von Mengen schreiben lassen, von denen jede endlicher Schnitt von in $\mathcal{B}$ enthaltenen Teilmengen von X ist. Man überlegt sich leicht, dass die Gesamtheit all der so gebildeten Teilmengen von X tatsächlich eine Topologie auf X bildet und dass es keine gröbere Topologie $\mathcal{T}$ gibt mit $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$.

Sind X und Y topologische Räume, so ist die *Produktopologie* auf $X \times Y$ die Topologie, die von allen „Streifen" $U \times Y$ und $X \times V$ erzeugt wird, wobei U offen in X und V offen in Y ist. Die „Rechtecke" $U \times V \subset X \times Y$ bilden eine Basis der Produkttopologie, da der Schnitt endlich vieler Rechtecke wieder ein Rechteck ist.

Direkt aus der Konstruktion folgt:

Proposition 1.13. *Die Produkttopologie auf $X \times Y$ hat die folgenden Eigenschaften:*

- *Die Projektionen $\pi_X : X \times Y \to X$ und $\pi_Y : X \times Y \to Y$ sind stetig.*
- *Ist $\mathcal{T}$ eine echt gröbere Topologie auf $X \times Y$ als die Produkttopologie, so sind die Projektionen $X \times Y \to X$ und $X \times Y \to Y$ nicht beide stetig.*

Mit anderen Worten: Die Produkttopologie ist die gröbste Topologie auf $X \times Y$ so dass beide Projektionen auf die Faktoren stetig sind.

23.4.12

Gewissermaßen dual zur Produkttopologie ist die sogenannte *Summentopologie*: Es seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{T}')$ topologische Räume und $X \cap Y = \emptyset$. Dann wird die Summentopologie auf der disjunkten Vereinigung $X \cup Y$ von $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}'$ erzeugt (diese Vereinigung bildet sogar eine Basis der Summentopologie). Sie ist die feinste Topologie auf $X \cup Y$, so dass die beiden Inklusionen $i_X : X \hookrightarrow X \cup Y$ und $i_Y : Y \hookrightarrow X \cup Y$ stetig sind.

Wir notieren die folgenden wichtigen Eigenschaften der Produkt- und Summentopologie. Die Beweise empfehlen wir als Übung.

Proposition 1.14. *Es seien X, Y, Z topologische Räume.*

- *Falls $X \cap Y = \emptyset$, so ist eine Abbildung $X \cup Y \to Z$ stetig genau dann, falls die beiden Kompositionen $X \overset{i_X}{\hookrightarrow} X \cup Y \to Z$ und $Y \overset{i_Y}{\hookrightarrow} X \cup Y \to Z$ stetig sind.*
- *Eine Abbildung $Z \to X \times Y$ ist stetig genau dann, falls die beiden Kompositionen $Z \to X \times Y \overset{\pi_X}{\to} X$ und $Z \to X \times Y \overset{\pi_Y}{\to} Y$ stetig sind.*

Es sei nun X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Wir definieren das *Innere*

$$\mathrm{int}(A) \subset A$$

als die Vereinigung aller in A enhaltenen offenen Mengen (da $\emptyset$ immer offen ist, gibt es mindestens eine solche Teilmenge). Nach Definition ist $\mathrm{int}(A) \subset A$ offen und jede andere (in X) offene Teilmenge, die in A enthalten ist, ist auch in $\mathrm{int}(A)$ enthalten. Damit ist $\mathrm{int}(A)$ die größte in A enthaltene in X offene Teilmenge. Entsprechende definieren wir den *Abschluss*

$$\overline{A} \supset A$$

als den Durchschnitt aller abgeschlossenen Teilmengen von X, die A enthalten. Man beachte dabei, dass der Schnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen eines topologischen Raumen wieder abgeschlossen ist. $\overline{A}$ ist nach Konstruktion die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X die A enthält. Offensichtlich ist

$$\overline{A} = X \setminus (\mathrm{int}(X \setminus A)) .$$

Definition 1.15. *Es sei X ein topologischer Raum, $x \in X$ und $V \subset X$ eine Teilmenge. Wir nennen V eine* Umgebung *von x, falls es eine offene Teilmenge $U \subset X$ gibt mit $x \in U$ und $U \subset V$. (Die Umgebung V braucht selbst keine offene Menge zu sein).*

Proposition 1.16. *Ein Punkt $x \in X$ liegt genau dann in $\overline{A}$, falls jede Umgebung von x einen Punkt aus A enthält.*

Weiterhin setzen wir

$$\partial A := \overline{A} \setminus \mathrm{int}(A) .$$

Dies ist der *Rand* von A. Aus der vorherigen Proposition folgt

Proposition 1.17. *Ein Punkt $x \in X$ liegt genau dann in ∂A, falls jede Umgebung von x sowohl Punkte von A als auch Punkte von $X \setminus A$ enthält.*

2. Zusammenhang und Wegzusammenhang

Anschaulich gesprochen ist ein topologischer Raum zusammenhängend, wenn er nicht in zwei oder mehr „voneinander unabhängige“ Teile zerfällt. Es gibt zwei grundlegende mathematische Präzisierungen dieser Vorstellung, die wir in diesem Kapitel besprechen werden.

Definition 2.1. *Ein topologischer Raum X heißt* wegweise zusammenhängend*, falls es für je zwei Punkte x, y eine stetige Abbilung*

$$\gamma : [0,1] \to X$$

gibt, die x mit y verbindet, d.h. $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.

Die euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$ (mit der Standardtopologie) sind wegzusammenhängend. Auch der topologische Raum $(\{p, q\}, \{\emptyset, \{p\}, \{p, q\}\})$ ist wegzusammenhängend (!). Die Vereinigung $(-\infty, 0) \cup (0, \infty) \subset \mathbb{R}$ (mit der Teilraumtopologie) ist nicht wegzusammenhängend (wir werden weiter unten sehen, warum).

25.4.12

Die Bedingung „x, y lassen sich durch einen Weg in X verbinden“ definiert eine Äquivalenzrelation auf X. Die Äquivalenzklassen nennt man *Wegzusammenhangskomponenten.* Das folgende Resultat ist offensichtlich:

Proposition 2.2. *Ist $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und ist X wegzusammenhängend, so ist auch $f(X)$ (mit der von Y induzierten Topologie) wegzusammenhängend.*

Etwas abstrakter ist der folgende Zusammenhangsbegriff:

Definition 2.3. *Ein topologischer Raum X heißt* zusammenhängend*, falls X nicht disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen ist.*

Die Teilmengen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ oder $(-\infty, 0) \cup (0, \infty) \subset \mathbb{R}$ sind nicht zusammenhängend.

Folgende Bedingungen sind äquivalent zum Zusammenhang von X:

- Die einzigen zugleich offenen und abgeschlossenen Teilmengen von X sind nur die leere Menge und X selber.
- Ist $f : X \to \{0, 1\}$ eine stetige Abbildung von X in den diskreten Raum mit zwei Elementen, dann ist f konstant.

Aus der zweiten Bedingung folgert man leicht:

Proposition 2.4.
- *Ist $X \to Y$ stetig und X zusammenhängend, so ist auch $f(X)$ zusammenhängend.*
- *Sind A, B zusammenhängender Teilmengen eines topologischen Raumes X und gilt $A \cap B \neq \emptyset$, so ist $A \cup B$ zusammenhängend.*

Wir erhalten damit (Transitivität folgt aus dem zweiten Teil der vorherigen Proposition)

Korollar 2.5. *Die Bedingung „x, y liegen beide in einem zusammenhängendem Unterraum von X“ definiert eine Äquivalenzrelation auf X.*

Die Äquivalenzklassen zu dieser Äquivalenzrelation nennt man die *Komponenten* von X. Man sieht leicht, dass X genau dann zusammenhängend ist, wenn X nur eine einzige Komponente (nämlich die Teilmenge $X \subset X$) hat: Die Implikation von links nach rechts ist klar. Sei umgekehrt X die einzige Komponente von X. Wir betrachten eine stetige Abbildung $f : X \to \{0, 1\}$ (der rechte Raum sei mit der diskreten Topologie versehen). Sind $p, q \in X$, so gibt es eine zusammenhängende Teilmenge $A \subset X$ mit $p, q \in A$ (denn nach Voraussetzung sind p, q bezüglich der Zusammenhangsrelation äquivalent). Die Abbildung $f|_A : A \to \{0, 1\}$ ist also konstant und somit $f(p) = f(q)$. Also ist f insgesamt konstant.

Beispiel. Die Komponenten des Unterraumes $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (wie immer mit der Teilraumtopologie) sind genau die einpunktigen Mengen $\{p\}$, $p \in \mathbb{Q}$. Trotzdem ist $\mathbb{Q}$ kein diskreter topologischer Raum!

Wir sehen, dass es in der Regel einfach ist zu zeigen, dass ein Raum wegzusammenhängend, bzw. nicht zusammenhängend ist. Das folgende fundamentale Resultat liefert in vielen Fällen die anderen Implikationen.

Proposition 2.6. *Die Menge $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ (mit der Teilraumtopologie) ist zusammenhängend.*

Beweis. Angenommen, es gibt disjunkte nichtleere offene Mengen $U, V \subset [0,1]$ mit $[0,1] = U \cup V$. Ohne Einschränkung gilt $1 \in V$. Wegen der Offenheit von V gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $(1-\epsilon, 1] \subset V$. Wir setzen

$$m := \sup U .$$

Nach dem vorher Gesagten ist $m < 1$. Gälte $m \in U$, so gäbe es wegen der Offenheit von U und wegen $m < 1$ ein $\delta > 0$ mit $[m, m+\delta) \subset U$ im Widerspruch zur Definition von m. Daher muss $m \in V$ gelten. Es folgt $m > 0$, denn ansonsten wäre $U = \emptyset$. Also gibt es ein $\delta > 0$ mit $(m-\delta, m] \subset V$, im Widerspruch zur Definition von m . □

Es folgt

Korollar 2.7. *Jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend.*

Beweis. Sei X wegzusammenhängend aber nicht zusammenhängend. Es sei $X = U \cup V$ mit disjunkten, offenen, nichtleeren Teilmengen $U, V \subset X$. Wir wählen $x \in U$ und $y \in V$ und verbinden diese Punkte durch einen Weg $\gamma : [0,1] \to X$. Dann ist $\gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V)$ eine Zerlegung von $[0,1]$ in zwei disjunkte, nichtleere, offene Teilmengen. Dies ist unmöglich, da $[0,1]$ zusammenhängt. □

Insbesondere ist der Unterraum $(-\infty, 0) \cup (0, \infty) \subset \mathbb{R}$ also nicht wegzusammenhängend. Weiterhin folgt, dass jede Wegzusammenhangskomponente eines Raumes in einer Zusammenhangskomponenten enthalten ist. Die Umkehrung des letzten Korollars gilt nicht: Man kann zusammenhängende Räume konstruieren, die nicht wegzusammenhängend sind, siehe Aufgabe 3 auf Übungsblatt 2.

Als Folgerung unserer Betrachtungen erhalten wir den bekannten Zwischenwertsatz:

Proposition 2.8. *Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Gilt $f(0) < 0$ und $f(1) > 0$, so existiert ein $t \in [0,1]$ mit $f(t) = 0$.*

Beweis. Ansonsten hätten wir $\mathrm{im}\,(f) \subset U \cup V$, wobei $U := (-\infty, 0), V := (0, \infty)$, und $\mathrm{im}\,(f) \cap U \neq \emptyset$ und $\mathrm{im}\,(f) \cap (V) \neq \emptyset$, d.h.

$$\mathrm{im}\, f = (U \cap \mathrm{im}\, f) \cup (V \cap \mathrm{im}\, f)$$

wäre eine Zerlegung von $\mathrm{im}\, f$ in zwei disjunkte nichtleere offene Teilmengen. Dies widerspricht der Tatsache, dass $\mathrm{im}\, f$ (nach Proposition 2.4) zusammenhängend ist. □

3. Konvergenz

Ein zentraler Begriff in der Theorie metrischer Räume ist der der konvergenten Folge. Die entsprechende Definition für allgemeine topologische Räume lautet wie folgt.

Definition 3.1. *Es sei X ein topologischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und $x \in X$. Man sagt, die Folge (x_n)* konvergiert gegen *x, falls für jede Umgebung $U \subset X$ von x ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit*

$$x_n \in U$$

für alle $n \geq N$. (Wir sagen auch, für jede Umgebung U von x liegt die Folge (x_n) schließlich *in U). Man schreibt dann*

$$x = \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n$$

und sagt, x ist Grenzwert *von (x_n).*

Für metrische Räume ergibt sich der alte Konvergenzbegriff. Im allgemenen können Folgen durchaus mehrere Grenzwerte haben: Es sei X eine beliebige Menge versehen mit der Klumpentopologie. Dann konvergiert jede Folge (x_n) in X gegen jeden Punkt in X.

Falls aber X die Hausdorffeigenschaft hat, so hat jede Folge in X höchstens einen Grenzwert. Man kann dazu im wesentlichen das Argument aus Analysis 1 benutzen.

2.5.12

Definition 3.2. *Es seien X und Y topologische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $x \in X$. Wir sagen f ist* stetig in *x, falls für jede Umgebung $V \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(V) \subset X$ eine Umgebung von x ist.*

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass f genau dann stetig ist, falls f stetig in jedem Punkt $x \in X$ ist.

Definition 3.3. *Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $x \in X$. Wir sagen f ist* folgenstetig *in x, falls für jede Folge (x_n) in X mit $\lim x_n = x$ die Bildfolge $(f(x_n))$ in Y gegen $f(x)$ konvergiert.*

Proposition 3.4. *Ist f stetig in x, so auch folgenstetig in x.*

Beweis. Sei (x_n) eine Folge in X mit $\lim x_n = x$. Ist nun $V \subset Y$ eine Umgebung von $f(x)$, so ist $f^{-1}(V) \subset X$ eine Umgebung von x, und somit liegt (x_n) schließlich in $f^{-1}(V)$. Dies ist gleichbedeutend damit, dass die Folge $(f(x_n))$ schließlich in V liegt. Da V beliebig war, folgt $\lim f(x_n) = f(x)$. □

Die Umkehrung dieser Aussage gilt leider nicht in allen topologischen Räumen, siehe Aufgabe 4 auf Blatt 3. Das Problem besteht grob gesprochen darin, dass es in der Regel „zu viele“ Umgebungen von $x \in X$ gibt.

Definition 3.5. *Es sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine* Umgebungsbasis *von x ist eine Menge $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ bestehend aus Umgebungen von x mit der folgenden Eigenschaft: Jede Umgebung von x enthält eine der speziellen Umgebungen in $\mathcal{B}$.*

Der Raum X erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom, *falls jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.*

Jeder metrische (und somit jeder normierte) Raum X erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom: Ist $x \in X$, so bilden die Mengen $B_{1/n}(x) \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, eine abzählbare Umgebungsbasis von x.

Proposition 3.6. *Es sei X ein topologischer Raum und $x \in X$ ein Punkt mit abzälbarer Umgebungsbasis. Dann ist jede in x folgenstetige Abbildung $f : X \to Y$ auch stetig in x.*

Beweis. Angenommen f sei nicht stetig in x. Dann existiert eine Umgebung $V \subset Y$ von $f(x)$, so dass $U := f^{-1}(V)$ keine Umgebung von x ist. Es sei (U_n) eine abzählbarer Umgebungsbasis von x. Ohne Einschränkung gelte $U_{n+1} \subset U_n$ für alle n (sonst ersetze man induktiv U_{n+1} durch $U_{n+1} \cap U_n$). Da U keine Umgebung von x ist, gibt es Punkte $x_n \in U_n \setminus U$ für alle n. Nach Konstruktion gilt $\lim x_n = x$ in X aber $f(x_n)$ konvergiert nicht gegen $f(x)$, da $f(x_n) \notin V$ für alle n. Dies steht im Widerspruch zur Folgenstetigkeit von f. $\square$

Das Problem in allgemeinen topologischen Räumen ist, dass Folgen alleine oft „zu dünn“ sind. Man löst das Problem dadurch, dass man für Folgen allgemeinere Indexmengen (als $\mathbb{N}$) zulässt.

Definition 3.7. *Eine* gerichtete Menge *ist eine Menge D zusammen mit einer partiellen Ordnung $\leq$, so dass es für $\alpha, \beta \in D$ immer ein $\gamma \in D$ gibt mit $\gamma \geq \alpha$ und $\gamma \geq \beta$. Ist X ein topologischer Raum, so ist ein* Netz *in X eine Abbildung $\phi : D \to X$, wobei D eine gerichtete Menge ist.*

Wir bezeichnen Netze in X oft mit $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ (d.h. wir setzen $x_\alpha := \phi(\alpha)$). Diese Schreibweise ist stark an diejenige für Folgen angelehnt. Wenn wir mit der gerichteten Menge $D = \mathbb{N}$ arbeiten, so sind über D indizierte Netze in X nichts anderes als Folgen in X.

Definition 3.8. *Es sei X ein topologischer Raum, $x \in X$ und $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ ein Netz in X. Man sagt, das Netz (x_α)* konvergiert *gegen x, falls es für jede Umgebung $U \subset X$ von x ein $\beta \in D$ gibt mit $x_\alpha \in U$ für alle $\alpha \geq \beta$. In diesem Fall schreiben wir auch $\lim_{\alpha \in D} x_\alpha = x$.*

Wenn wir statt Folgen Netze benutzen, können wir nun tatsächlich die Äquivalenz von Stetigkeit und „Folgenstetigkeit“ in jedem topologischen Raum zeigen.

Definition 3.9. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt* netzstetig *in $x \in X$, falls für jedes Netz (x_α) in X mit $\lim x_\alpha = x$ das Bildnetz $(f(x_\alpha))$ gegen $f(x)$ konvergiert.*

3.5.12

Proposition 3.10. *Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen X und Y. Die Abbildung f ist genau dann stetig in $x \in X$, wenn sie netzstetig in x ist.*

Beweis. Falls f stetig in x ist, so folgt leicht aus den Definitionen, dass x auch netzstetig in x ist: Es sei (x_α) ein Netz in X, das gegen x konvergiert. Ist $V \subset Y$ eine Umgebung von $f(x)$, so ist nach Annahme $f^{-1}(V) \subset X$ eine Umgebung von x. Also liegt (x_α) schließlich in $f^{-1}(V)$. Wenden wir f auf beide Seiten an, folgt, dass $(f(x_\alpha))$ schließlich in V liegt. Also konvergiert $(f(x_\alpha)$ gegen $f(x)$.

Se nun umgekehrt $f : X \to Y$ nicht stetig in x. Es gibt dann eine Umgebung $V \subset Y$ von $f(x)$, so dass $U := f^{-1}(V) \subset X$ keine Umgebung von x ist. Wir definieren nun eine gerichtete Menge D als die Menge aller Umgebungen $W \subset X$ von x mit der durch die Inklusion gegebenen partiellen Ordnung, d.h. $W_1 \leq W_2$, falls $W_2 \subset W_1$ (man sieht leicht, dass diese Ordnung gerichtet ist: Sind $W_1, W_2 \in D$, dann ist $W_1 \cap W_2$ ebenfalls eine Umgebung von x, also ein Element von D, und es gilt $W_1 \cap W_2 \geq W_1, W_2$. Für beliebiges $W \in D$ gibt es einen Punkt $x_W \in W \subset U$, denn U ist keine Umgebung von x. Wir behaupten, dass das Netz $(x_W)_{W \in D}$ in X gegen x konvergiert. Sei dazu $U \subset X$ eine beliebige Umgebung von x. Nach Konstruktion gilt dann für alle $W \in D$ mit $W \geq U$, dass $x_W \in U$. Also ist das Netz (x_W) schließlich in U. Andererseits konvergiert $(f(x_W))_{W\ inD}$ in Y nicht gegen $f(x)$, denn nach Konstruktion gilt $f(x_W) \notin V$ ür alle $W \in D$. Also ist f nicht netzstetig in x. □

Wir haben außerdem

Proposition 3.11. *Ist $A \subset X$ Teilmenge eines topologischen Raumes, so besteht $\overline{A}$ genau aus den Limiten von Netzen in A, die in X konvergieren.*

Beweis. Ist $x \in \overline{A}$, so schneidet jede Umgebung U von x die Menge A. Definieren wir D als die gerichtete Menge der Umgebungen von x, so können wir also leicht (ähnlich wie oben) ein durch D parametrisiertes Netz in A definieren, das gegen x konvergiert. Ist umgekehrt x Limes eines Netzes $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ in X, so liegt dieses Netz schließlich in jeder Umgebung von x, damit muss jede Umgebung von x die Menge A nichtleer schneiden, und es folgt $x \in \overline{A}$ wie gewünscht. □

Wir erinnern: Ist (x_n) eine Folge in einem metrischen Raum X, so nennen wir $x \in X$ einen *Häufungspunkt* dieser Folge, falls jede Umgebung von x unendlich viele Folgenglieder enthält. Wir definieren entsprechend:

Definition 3.12. *Ein* Häufungspunkt *eines Netzes (x_α) in X ist ein Punkt $x \in X$, so dass für jede Umgebung $U \subset X$ von x das Netz* häufig *in U ist, d.h. für alle $\alpha \in D$ existiert ein $\beta \geq \alpha$ mit $x_\beta \in U$.*

Ist $x \in X$ Häufungspunkt einer Folge (x_n) in einem metrischen Raum, so konvergiert eine Teilfolge gegen x. Eine ähnliche Aussage gilt für Netze. Die korrekte Verallgemeinerung des Konzeptes der Teilfolge lautet wie folgt.

Definition 3.13. *Sind D und E gerichtete Mengen, so nennen wir eine Abbildung $h : E \to D$* final, *falls für alle $\delta \in D$ ein $\eta \in E$ existiert mit $h(\gamma) \geq \delta$ für alle $\gamma \geq \eta$. Ein* Unternetz *eines Netzes $\phi : D \to X$ ist eine*

Komposition $\phi \circ h : E \to X$, wobei $h : E \to D$ eine finale Funktion ist. Wir schreiben auch $(x_{h(\gamma)})_{\gamma \in E}$.

Konvergiert ein Netz in X, so offensichtlich auch jedes Unternetz.

Folgende Aussage, deren Beweis in wenig verwickelt ist, formuliert den Zusammenhang von Unternetzen und Häufungspunkten von Netzen.

Proposition 3.14. *Es sei $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ ein Netz in X. Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann Häufungspunkt dieses Netzes, falls ein Unternetz gegen x konvergiert.*

Beweis. Es sei $(x_{h(\gamma)})_{\gamma \in E}$ ein Unternetz, das gegen x konvergiert. Sei $U \subset X$ eine Umgebung von x und $\alpha \in D$. Da das Unternetz konvergiert, existiert ein $\epsilon \in E$ mit $x_{h(\gamma)} \in U$ für alle $\gamma \geq \epsilon$. Wir müssen zeigen, dass wir zusätzlich $h(\gamma) \geq \alpha$ erreichen können, denn dann folgt (α war ja beliebig), dass x Häufungspunkt ist. Wegen der Kofinalität von h gibt es jedenfalls ein $\eta \in E$ mit $h(\gamma) \geq \alpha$ für alle $\gamma \geq \eta$. Nun benutzen wir, dass E gerichtet ist und finden ein $\xi \in E$ mit $\xi \geq \eta, \epsilon$. Dann gilt $h(\xi) \geq \alpha$ und $x_{h(\xi)} \in U$, wie gewünscht.

Es sei nun umgekehrt $x \in X$ Häufungspunkt von (x_α). Wir konstruieren ein Unternetz, das gegen x konvergiert und betrachten dazu die gerichtete Menge

$$E := \{(\alpha, U) \mid \alpha \in D, U \text{ Umgebung von x }, x_\alpha \in U\}$$

mit der partiellen Ordnung

$$(\alpha, U) \leq (\alpha', U') :\Leftrightarrow \alpha \leq \alpha', U' \subset U \,.$$

Wir zeigen, dass E wirklich gerichtet ist. Seien dazu $(\alpha, U), (\beta, V) \in E$. Da $(x_\gamma)_{\gamma \in D}$ häufig in $U \cap V$ ist ($U \cap V$ ist ja ebenfalls eine Umgebung von x), gibt es (weil D gerichtet ist) ein $\gamma \geq \alpha, \beta$ mit $x_\gamma \in U \cap V$. Somit ist $(U \cap V, \gamma) \in E$ und $(\gamma, U \cap V) \geq (\alpha, U), (\beta, V)$ wie gewünscht. Betrachte nun die Abbildung

$$h : E \to D \,, \ (\alpha, U) \mapsto \alpha \,.$$

Diese Abbildung ist final, denn ist $\delta \in D$, so ist $(\delta, X) \in E$ und außerdem impliziert $(\alpha, U) \geq (\delta, X)$ die Aussage $h(\alpha, U) = \alpha \geq \delta$. Wir behaupten, dass das Unternetz $(x_{h(\gamma)})_{\gamma \in E}$ gegen x konvergiert. Es sei dazu $W \subset X$ eine Umgebung von x. Da (x_α) häufig in W ist, gibt es ein $\beta \in D$ mit $x_\beta \in W$. Dann sind aber für alle $(\alpha, U) \geq (\beta, W)$ die Elemente $x_{(\alpha,U)}$ in W, d.h. $(x_{h(\gamma)})_{\gamma \in E}$ ist schließlich in W. □

4. Vollständige metrische Räume

Definition 4.1. *Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) heißt* Cauchy-Folge, *falls es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit*

$$d(x_n, x_m) < \epsilon$$

für alle $n, m \geq N$. Der metrische Raum (X, d) heißt vollständig, *falls jede Cauchy-Folge in X konvergiert.*

Jede in einem metrischen Raum konvergente Folge ist automatisch eine Cauchyfolge. Sind (X_1, d_1) und (X_2, d_2) vollständige metrische Räume, so ist auch $X_1 \times X_2$ mit der Produktmetrik d vollständig, wobei

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}$$

(die Metrik d induziert übrigens die Produkttopologie auf $X_1 \times X_2$). Da die Menge der reellen Zahlen mit der gewöhnlichen Abstandsmetrik vollständig ist, gilt dies somit auch für die euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Vollständigkeit ist allerdings keine Homöomorphieinvariante: Das offene Intervall $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ ist mit der induzierten Metrik nicht vollständig, jedoch homöomorph zu $\mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen Metrik.

Ist X ein vollständiger metrischer Raum und $A \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum, so ist A mit der induzierten Metrik ebenfalls vollständig. Ist allgemeiner $A \subset X$ ein beliebiger Unterraum, so ist $\overline{A} \subset X$ der kleinste vollständige Unterraum von X, der A enthält, denn $\overline{A}$ besteht genau aus den Limiten von Folgen, die in A liegen und in X konvergieren.

7.5.12

Vollständige metrische Räume sind zentrale Objekte in der Analysis. Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass jeder metrische Raum eine kanonische Vervollständigung besitzt.

Der Schlüssel hierzu ist die Vollständigkeit der reellen Zahlen und die Betrachtung sogenannter Funktionenräume.

Definition 4.2. *Es sei X eine Menge. Wir bezeichnen mit*

$$\mathcal{B}(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \mid \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty\}$$

die Menge der beschränkten Abbildungen $X \to \mathbb{R}$ *versehen mit der Metrik*

$$d(f, g) := \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| .$$

Man prüft leicht nach, dass es sich tatsächlich um eine Metrik auf $\mathcal{B}(X)$ handelt.

Proposition 4.3. *Der soeben definierte metrische Raum $(\mathcal{B}(X), d)$ ist vollständig.*

Beweis. Es sei (f_n) eine Cauchy-Folge in $\mathcal{B}(X)$. Dann sind für alle $x \in X$ die Folgen $(f_n(x))$ Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$ (nach Definition der Metrik auf $\mathcal{B}(X)$) und konvergieren daher in $\mathbb{R}$ gegen eine (eindeutig bestimmte) Zahl, die wir $f(x)$ nennen wollen. Es sei nun $\epsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $d(f_n, f_m) < \epsilon$, falls $n, m \geq N$. Man prüft leicht nach, dass dann $d(f_n, f) \leq \epsilon$ für alle $n \geq N$. Es gilt daher $\lim f_n = f$ im metrischen Raum $\mathcal{B}(X)$. $\square$

Definition 4.4. *Sind (X, d) und (X', d') metrische Räume, so heißt eine Abbildung $f : X \to X'$ eine* Isometrie*, falls f bijektiv ist und*

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

für alle $x, y \in X$. In diesem Fall ist auch f^{-1} eine Isometrie und f ist (bzgl. der induzierten Topologien) ein Homöomorphismus.

Eine Abbildung $f : X \to X'$ heißt isometrische Einbettung, *falls f nicht unbedingt bijektiv ist, jedoch obige Verträglichkeit bezüglich der Metriken d und d' erfüllt. In diesem Fall ist die induzierte Abbildung $f : X \to f(X)$ automatisch eine Isometrie (wobei $f(X)$ die Einschränkung der Metrik von X' trägt).*

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Vervollständigung *von X ist ein vollständiger metrischer Raum Y zusammen mit einer isometrischen Einbettung $f : X \to Y$, so dass $f(X)$* dicht *in Y liegt, d.h. $\overline{f(X)} = Y$.*

Wir zeigen nun, dass jeder metrische Raum mindestens eine Vervollständigung besitzt. Dazu zeigen wir:

Proposition 4.5. *Es sei X ein metrischer Raum. Dann existiert eine isometrische Einbettung von X in einen vollständigen metrischen Raum.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $X \neq \emptyset$. Es sei $x_0 \in X$ fest gewählt. Für $a \in X$ definieren wir eine Abbildung $\phi_a : X \to \mathbb{R}$ durch

$$\phi_a(x) = d(x, a) - d(x, x_0)\,.$$

Die Abbildung ϕ_a ist beschränkt, denn

$$|\phi_a(x)| \leq d(x_0, a)$$

wegen der Dreiecksungleichungen $d(x, a) \leq d(x, x_0) + d(x_0, a)$ und $d(x, x_0) \leq d(x, a) + d(a, x_0)$. Wir erhalten also eine Abbildung

$$\phi : X \to \mathcal{B}(X)\,, a \mapsto \phi_a\,.$$

Wir behaupten, dass ϕ eine isometrische Einbettung ist. Es seien also $a, b \in X$. Nach Definition gilt dann

$$d(\phi_a, \phi_b) = \sup_{x \in X} |d(x, a) - d(x, b)|\,.$$

Wieder nach der Dreiecksungleichung ist $|d(x, a) - d(x, b)| \leq d(a, b)$, so dass insgesamt

$$d(\phi_a, \phi_b) \leq d(a, b)\,.$$

In dieser Ungleichung kann nicht $<$ stehen, denn

$$\sup_{x \in X} |d(x, a) - d(x, b)| \geq |d(b, a) - d(b, b)| = d(a, b)\,.$$

Somit ist ϕ tatsächlich eine isometrische Einbettung. □

Wir erhalten somit

Satz 4.6. *Ist X ein metrischer Raum, so existiert eine Vervollständigung*

$$X \hookrightarrow Y\,.$$

Beweis. Wir betrachten die isometrische Einbettung $\phi : X \to \mathcal{B}(X)$ und setzen

$$Y := \overline{\phi(X)} \subset \mathcal{B}(X)$$

□

Wir zeigen nun noch die Eindeutigkeit der Vervollständigung eines metrischen Raumes.

Proposition 4.7. *Es sei X ein metrischer Raum und es seien*

$$f_1 : X \to Y_1 \,, f_2 : X \to Y_2$$

Vervollständigungen von X. Dann existiert genau eine Isometrie

$$\phi_{21} : Y_1 \to Y_2$$

mit $\phi_{21}|_{f_1(X)} = f_2 \circ f_1^{-1}$. Grob gesprochen: Die Vervollständigung eines metrischen Raumes ist bis auf Isometrie eindeutig bestimmt.

Beweis. Die Abbildung

$$f_1(X) \to Y_2 \,, \; x \mapsto f_2 \circ f_1^{-1}(x)$$

ist nach Voraussetzung eine isometrische Einbettung. Wir setzen diese Abbildung wie folgt zu einer Abbildung

$$\phi_{21} : Y_1 = \overline{f_1(X)} \to Y_2$$

fort: Ist $x \in Y_1$, so gibt es eine Folge (x_n) in $f_1(X)$ mit $\lim x_n = x$. Da $f_2 \circ f_1^{-1}$ eine isometrische Einbettung ist, ist $(f_2 \circ f_1^{-1}(x_n))$ eine Cauchy-Folge in Y_2. Wir setzen

$$\phi_{21}(x) := \lim f_2 \circ f_1^{-1}(x_n) \in Y_2 \,.$$

Ist (x'_n) eine andere Folge in $f_1(X)$ mit $\lim x'_n = y$, so ist

$$\lim d(x_n, x'_n) = 0 \,,$$

weil $f_2 \circ f_1^{-1}$ eine isometrische Einbettung ist, haben wir also

$$\lim f_2 \circ f_1^{-1}(x_n) = \lim f_2 \circ f_1^{-1}(x'_n)$$

und die Definition von ϕ_{21} hängt somit nicht von der Auswahl der Folge (x_n) ab. Man überprüft nun leicht, dass ϕ_{21} eine isometrische Einbettung ist. Ebenso setzt man die Abbildung

$$f_2(X) \to Y_1 \,, \; x \mapsto f_1 \circ f_2^{-1}(x)$$

zu einer isometrischen Einbettung $\phi_{12} : Y_2 \to Y_1$ fort und zeigt, dass ϕ_{12} und ϕ_{21} invers zueindander sind. □

In den Übungen wird ein anderes Modell der Vervollständigung eines metrischen Raumes vorgestellt, das auf der Betrachtung von Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen beruht.

Wichtige Räume in der Analysis entstehen durch Vervollständigung: Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, so definiert man den Banach-Raum $L^p(U)$,

$1 \leq p < \infty$, bestehend aus Äquivalenzklassen von messbaren Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$, so dass $|f|^p$ Lebesgue-integrierbar ist, wobei zwei solche Funktionen als äquivalent gelten, wenn sie bis auf eine Nullmenge in U übereinstimmen. Man betrachtet in der Analysis außerdem $C_c^\infty(U)$, d.h. die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen $U \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger, versehen mit der Metrik

$$d_p(f,g) := (\int_U |f(x) - g(x)|^p)^{1/p} .$$

und zeigt, dass die kanonische Inklusion

$$C_c^\infty(U) \hookrightarrow L^p(U)$$

eine Vervollständigung im Sinne von Definition 4.4 ist.

Aus Proposition 4.7 folgt, dass $L^p(U)$ kanonisch isometrisch zu der in Theorem 9.5 konstruierten Vervollständigung des metrischen Raumes $(C_c^\infty(U), d_p)$ ist.

9. 5.12

5. Kompaktheit

Definition 5.1. *Es sei X ein topologischer Raum. Eine* offene Überdeckung *von X ist eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ offener Teilmengen von X, mit*

$$\bigcup_{i\in I} U_i = X .$$

Der Raum X heißt kompakt*, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt, also*

$$\bigcup_{i\in I_0} U_i = X .$$

für eine endliche Teilmenge $I_0 \subset I$.

Folgende Umformulierung dieser Definition ist manchmal nützlich: Wir sagen, eine Familie $\mathcal{C}$ von Teilmengen von X habe die *endliche Schnitteigenschaft*, falls der Schnitt je endlich vieler Mengen aus $\mathcal{C}$ nichtleer ist. Wir haben dann:

Proposition 5.2. *Ein Raum X ist genau dann kompakt, falls jede Familie $(C_i)_{i\in I}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X, die die endliche Schnitteigenschaft besitzt, einen nichtleeren Schnitt hat, d.h. $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$.*

Man zeigt leicht, dass die Menge $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ nicht kompakt ist. Ist X ein kompakter Raum und Y homöomorph zu X, so ist Y ebenfalls kompakt.

Proposition 5.3. *Jede kompakte Teilmenge eines Hausdorffraumes ist abgeschlossen.*

Beweis. Es sei X Hausdorffsch und $A \subset X$ kompakt. Wähle ein beliebiges $x \in X \setminus A$. Ist $a \in A$, so gibt es (in X) offene disjunkte Umgebungen U_a von a und V_a von x. Da A kompakt ist und $A = \cup_{a \in A}(U_a \cap A)$, gibt es endlich viele Punkte $a_1, \ldots, a_k \in A$ mit $A \subset U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_k}$. Dann liegt die offene Umgebung $V_{a_1} \cap \ldots \cap V_{a_k}$ von x ganz in $X \setminus A$. Dieses Argument zeigt, dass $X \setminus A$ offen und somit A abgeschlossen ist. □

Proposition 5.4. *Ist X kompakt und $f : X \to Y$ stetig, so ist auch $f(X) \subset Y$ kompakt.*

Beweis. Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$, so ist $(f^{-1}(U_i))_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Da diese eine endliche Teilüberdeckung besitzt, gilt dies also auch für (U_i). □

Proposition 5.5. *Jeder abgeschlossene Teilraum eines kompakten Raumes ist kompakt.*

Beweis. Sei X kompakt und $A \subset X$ abgeschlossen. Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A, so gibt es eine Familie $(V_i)_{i \in I}$ offener Teilmengen von X mit

$$U_i = V_i \cap A$$

für alle $i \in I$ (nach Definition der Teilraumtopologie). Da X kompakt ist, hat nun die offene Überdeckung $(V_i)_{i \in I} \cup \{X \setminus A\}$ von X eine endliche Teilüberdeckung. Schneiden wir die in ihr enthaltenen Mengen mit A, erhalten wir eine endliche Teilüberdeckung von $(U_i)_{i \in I}$. □

Die letzten beiden Tatsachen haben folgende wichtige Konsequenz:

Proposition 5.6. *Es sei $f : X \to Y$ eine bijektive stetige Abbildung von einem kompakten Raum in einen Hausdorffraum. Dann ist f ein Homöomorphismus.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass f^{-1} stetig ist. Da f bijektiv ist, können wir gleichbedeutend nachweisen, dass f *abgeschlossen* ist, d.h. ist $A \subset X$ abgeschlossen, so auch $f(A) \subset Y$. Ist aber $A \subset X$ abgeschlossen, so ist A kompakt, somit auch $f(A) \subset Y$ und damit ist $f(A)$ als kompakter Teilraum des Hausdorffraumes Y abgeschlossen. □

Proposition 5.7. *Das Einheitsintervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ ist kompakt.*

Beweis. Es sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $[0, 1]$ und

$$S := \{s \in [0, 1] \mid [0, s] \text{ besitzt eine endliche Teilüberdeckung von } (U_i)\}\,.$$

Da $0 \in S$, gilt $S \neq \emptyset$. Es sei $b = \sup S$. Wir behaupten $S = [0, b]$. Ansonsten wäre nämlich $S = [0, b)$. Wir finden dann ein U_i mit $b \in U_i$ und damit gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $(b - \epsilon, b] \subset U_i$. Da $[0, b - \epsilon/2]$ von endlich vielen Elementen aus (U_i) überdeckt wird, gilt dies somit auch für $[0, b]$ im Widerspruch zu $S = [0, b)$. Um die Proposition zu zeigen, müssen wir also nur noch $b = 1$ nachweisen. Gilt aber $b < 1$, so zeigt man mit einem ähnlichen Argument wie eben, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt mit $[0, b + \epsilon/2] \subset S$ im Widerspruch zur Definition von S. □

Es folgt, dass jedes abgeschlossene Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kompakt ist (denn es ist homöomorph zu $[0, 1]$. Umgekehrt muss jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$ beschränkt sein, sonst hätte die offene Überdeckung

$$K \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n)$$

keine endliche Teilüberdeckung.

14. 5.12

Durch Kombination der bisherigen Resultate zeigen wir:

Proposition 5.8 (Heine-Borel)**.** *Eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis. Falls $K \subset \mathbb{R}$ kompakt ist, dann ist K beschränkt (wie gerade gezeigt wurde) und abgeschlossen nach Proposition 5.3.

Ist umgekehrt $K \subset \mathbb{R}$ beschränkt und abgeschlossen, dann gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $K \subset [a, b]$. Dann ist aber K abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raumes $[a, b]$ und somit nach Proposition 5.5 selbst kompakt. □

Wir wollen dieses Resultat auf die Räume $\mathbb{R}^n$ ausdehnen. Dazu zeigen wir:

Proposition 5.9. *Es seien X und Y kompakt. Dann ist auch das topologische Produkt $X \times Y$ kompakt.*

Beweis. Es sei $(W_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $X \times Y$. Jede Menge W_i ist Vereinigung von offenen Kästchen $U \times V$ mit $U \subset X, V \subset Y$ offen. Es genügt daher zu zeigen, dass jede Überdeckung $(U_i \times V_i)_{i \in I}$ von $X \times Y$ durch solche offenen Kästchen eine Teilüberdeckung besitzt (I ist jetzt eine neue Indexmenge). Ist $x \in X$, so wird $\{x\} \times Y$ durch endlich viele dieser Kästchen überdeckt:

$$\{x\} \times Y \subset (U_1 \times V_1) \cup \ldots \cup (U_k \times V_k)$$

überdeckt, da Y kompakt ist. Dann ist der Schnitt $U_x := U_1 \cap \ldots \cap U_k \subset X$ offen und wir haben

$$U_x \times Y \subset (U_1 \times V_1) \cup \ldots \cup (U_k \times V_k) \, .$$

Man wähle eine endliche Teilüberdeckung der offenen Überdeckung $(U_x)_{x \in X}$ von X und erhält daraus insgesamt eine endliche Teilüberdeckung von $X \times Y$ durch offene Kästchen. □

Natürlich verallgemeinert sich diese Aussage leicht auf das topologische Produkt endlich vieler kompakter Räume. Schwieriger ist das folgende Resultat zu beweisen:

Satz 5.10 (Tychonoff)**.** *Es sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie kompakter Räume. Dann ist das topologische Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ ebenfalls kompakt.*

Den Beweis dieser wichtigen Aussagen geben wir später in diesem Abschnitt.

Den folgenden Satz zeigt man analog zu Proposition 5.8.

Satz 5.11 (Heine-Borel). *Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

In den Übungen wird ein allgemeines Kriterium angegeben, wann ein metrischer Raum kompakt ist (Vollständigkeit und totale Beschränktheit).

Definition 5.12. *Ein topologischer Raum X heißt* folgenkompakt*, wenn jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X eine konvergente Teilfolge hat.*

Proposition 5.13. *Es sei X ein metrischer Raum. Dann ist X genau dann kompakt, wenn X folgenkompakt ist.*

Beweis. Jeder metrische Raum erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom. Daher zeigt Aufgabe 1 auf Blatt 4, dass jeder kompakte metrische Raum folgenkompakt ist.

Umgekehrt zeigt man zunächst, dass jeder folgenkompakte metrische Raum vollständig und total beschränkt ist. Damit ist jeder folgenkompakte metrische Raum kompakt nach Übung 2 auf Blatt 4. □

Bei allgemeinen topologischen Räumen ist Folgenkompaktheit weder notwendig noch hinreichend für Kompaktheit. So wird zum Beispiel auf Blatt 5 ein kompakter topologischer Raum konstruiert, der nicht folgenkompakt ist.

Arbeiten wir mit Netzen, ist die Welt aber wieder in Ordnung.

Proposition 5.14. *Es sei X ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:*

- *X ist kompakt.*
- *X ist* netzkompakt*, d.h. jedes (nichtleere) Netz $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ in X hat ein konvergentes Unternetz (vgl. Definition 3.13).*

Beweis. Wir beweisen zunächst, dass jeder netzkompakte Raum auch kompakt ist. Die andere Richtung folgt etwas später aus der Diskussion universeller Netze.

Es sei also X netzkompakt und $(C_i)_{i\in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von X mit der endlichen Schnitteigenschaft (d.h. der Schnitt je endlich vieler Mengen in (C_i) ist nichtleer). Wir können annehmen, dass (C_i) abgeschlossen unter endlichen Schnitten ist (indem wir die Schnitte je endlich vieler Mengen zu (C_i) hinzunehmen). Wir erhalten eine gerichtete Ordnung auf I durch

$$i \geq j :\Leftrightarrow C_i \subset C_j\,.$$

(Diese Ordnung ist gerichtet, weil (C_i) abgeschlossen unter endlichen Schnitten ist). Wir definieren ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ indem wir für jedes $i \in I$ ein Element $x_i \in C_i$ auswählen. Nach Voraussetzung existiert ein konvergentes Unternetz von (x_i), gegeben durch eine gerichtete Menge D' und eine finale Abbildung $h : D' \to I$. Es sei $x \in X$ ein Grenzwert des Unternetzes $(x_{h(\gamma)})_{\gamma\in D'}$. Sei nun $i \in I$. Dann gibt es ein $\alpha \in D'$ so dass $x_{h(\gamma)} \in C_i$ für alle $\gamma \geq \alpha$ nach der Definition von finaler Abbildung und der Konstruktion des Netzes (x_i). Damit ist $x \in C_i$, denn die abgeschlossene Menge C_i enthält alle Limiten von in X konvergenten Netzen in C_i . In diesem Argument war aber $i \in I$ beliebig. Also ist $x \in \bigcap_{i \in I} C_i$ und dieser Schnitt somit nicht leer. Daraus folgt die Kompaktheit von X. $\square$

Der Rest dieses Abschnittes ist dem Beweis der folgenden Verallgemeinerung von Proposition 5.9 gewidmet.

Satz 5.15 (Tychonoff)**.** *Es sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie kompakter Räume. Dann ist das topologische Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ ebenfalls kompakt.*

Der Beweis beruht auf der Betrachtung sogenannter universeller Netze. Zunächst wiederholen wir ein paar Sprechweisen: Es sei X ein topologischer Raum, $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ ein Netz in X und $A \subset X$ eine Teilmenge.

- Man sagt, (x_α) ist *schließlich* in A, falls es ein $\beta \in D$ gibt mit $x_\alpha \in A$ für alle $\alpha \geq \beta$.
- Man sagt, (x_α) ist *häufig* in A, falls es für alle $\beta \in D$ ein $\alpha \in D$ gibt mit $\alpha \geq \beta$ und $x_\alpha \in D$.

Es ist nicht schwer zu sehen, dass jedes Netz entweder häufig in A oder in $X \setminus A$ ist.

Definition 5.16. *Ein Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ heißt* universell*, falls für jede Teilmenge $A \subset X$, das Netz entweder schließlich in A oder schließlich in $X \setminus A$ ist.*

Der folgende Satz ist der technische Kern des Beweises des Satzes von Tychonoff.

Proposition 5.17. *Jedes nichtleere Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ in X besitzt ein universelles Unternetz.*

Bevor wir diese Proposition zeigen, erinnern wir an das *Zornsche Lemma*: Es sei P eine nichtleere partiell geordnete Menge, in der jede Kette $C \subset P$ eine obere Schranke in P hat, d.h. ist C eine beliebige Teilmenge von P, die mit der induzierten Ordnung total geordnet ist, so existiert ein $p \in P$ mit $p \geq c$ für alle $c \in C$.

Dann besitzt P ein maximales Element, d.h. es gibt ein $m \in P$, so dass für alle $p \in P$ die Implikation $p \geq m \Rightarrow p = m$ gilt.

16. 5.12

Beweis von Proposition 5.17. Es sei $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ ein Netz mit $D \neq \emptyset$. Wir betrachten die Menge P aller Mengen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X, die die folgenden Eigenschaften haben:

i. Falls $A \in \mathcal{A}$, dann ist (x_α) häufig in A,
ii. $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen unter endlichen Schnitten, d.h. falls $A, B \in \mathcal{A}$, dann ist $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Wir können zum Beispiel $\mathcal{A} = \{X\}$ nehmen. Die Menge P ist durch die Inklusionsrelation partiell geordnet und jede Kette $C \subset P$ von solchen Mengen besitzt eine obere Schranke, gegeben durch die Vereinigung $\bigcup_{\mathcal{A} \in C} \mathcal{A}$. Nach dem Zornschen Lemma gibt es eine maximale Menge $\mathcal{A}_0$ in P mit den beiden obigen Eigenschaften. Offensichtlich gilt $X \in \mathcal{A}_0$ (sonst könnten wir diese Menge einfach zu $\mathcal{A}_0$ hinzunehmen, im Widerspruch zur Maximalität von $\mathcal{A}_0$). Wir betrachten nun die Menge

$$D' := \{(A, \alpha) \in \mathcal{A}_0 \times D \mid x_\alpha \in A\}$$

zusammen mit der gerichteten Ordnung

$$(A, \alpha) \leq (B, \beta) \Leftrightarrow B \subset A \,, \alpha \leq \beta \,.$$

Die Zuordnung

$$h : D' \to D \,, \ (A, \alpha) \mapsto \alpha$$

ist final (da für alle $\alpha \in D$ das Paar (X, α) in D' liegt). Wir beweisen, dass das Unternetz $(x_{h(\gamma)})_{\gamma \in D'}$ universell ist.

Es sei $S \subset X$ eine Teilmenge, so dass dieses Unternetz häufig in S ist. Nach Definition bedeutet dies, dass für alle $(A, \alpha) \in D'$ ein $(B, \beta) \geq (A, \alpha)$ existiert mit $x_\beta = x_{h(B,\beta)} \in S$. Da $B \subset A$ haben wir also

$$x_\beta \in B \cap S \subset A \cap S \,.$$

Es sei nun zusätzlich $A \in \mathcal{A}_0$. Wir behaupten, dass $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ häufig in $A \cap S$ ist. Sei also $\delta \in D$. Dann gibt es ein $\alpha \geq \delta$ mit $x_\alpha \in A$, da (x_α) häufig in A ist. Wir erhalten $(A, \alpha) \in D'$ und nach der vorherigen Bemerkung existiert ein $\beta \geq \alpha$ mit $x_\beta \in A \cap S$ wie gewünscht.

Wir folgern daraus, dass $S \in \mathcal{A}_0$: Ansonsten könnten wir alle Mengen der Form $S \cap A$ mit $A \in \mathcal{A}_0$ zu $\mathcal{A}_0$ hinzunehmen (d.h. es wird insbesondere $S = S \cap X$ hinzugenommen!), und so das Mengensytem $\mathcal{A}_0$ zu einem Mengensystem vergößern, dass immer noch die Eigenschaften i. und ii. von oben hat. Dann wäre aber $\mathcal{A}_0$ nicht maximal in P.

Falls nun das Unternetz $(x_{h(\gamma)})_{\gamma \in D'}$ ebenfalls häufig in $X \setminus S$ ist, so hätten wir mit dem gleichen Argument $X \setminus S \in \mathcal{A}_0$ also auch

$$\emptyset = S \cap (X \setminus S) \in \mathcal{A}_0 \,.$$

Wegen $D \neq \emptyset$ ist das Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ aber sicher nicht häufig in $\emptyset$ und aus diesem Widerspruch folgt, dass $(x_{h(\gamma)})_{\gamma \in D'}$ nicht häufig in S und gleichzeitig häufig in $X \setminus S$ sein kann. Hieraus folgt die interessante Eigenschaft:

Ist $(x_{h(\gamma)})_{\gamma \in D'}$ häufig in $S \subset X$, so auch schließlich in S.

Ist nun $A \subset X$, so ist $(x_{h(\gamma)})_{\gamma \in D'}$ wie jedes Netz in X häufig in A oder häufig in $X \setminus A$. Nach dem vorher Gesagten ist dieses Netz daher schließlich in A oder schließlich in $X \setminus A$ und das zeigt unsere Behauptung.

Wir können nun die obige Charakterisierung von kompakten Räumen zu Ende führen.

Satz 5.18. *Es sei X ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:*

a) *X ist kompakt.*

b) *Jedes nichtleere universelle Netz in X konvergiert in X.*
c) *Jedes nichtleere Netz in X hat ein konvergentes Unternetz.*

Beweis. Es sei X kompakt und es sei $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ ein universelles Netz. Angenommen, dieses ist nicht konvergent. Ist $x \in X$, so gibt es dann eine offene Umgebung U_x von x, so dass (x_α) nicht schließlich in U_x ist. Wegen der Universalität ist dann (x_α) schließlich in $X \setminus U_x$, d.h. es gibt einen Index $\alpha_x \in D$, so dass $x_\beta \notin U_x$, falls $\beta \geq \alpha_x$. Es sei $U_{x_1}, \ldots, U_{x_k}$ eine endliche Teilüberdeckung von X Wir wählen ein $\beta \geq \alpha_{x_1}, \ldots, \alpha_{x_k}$ (so ein β existiert, da D gerichtet ist) und schließen, dass $x_\beta \notin U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_k} = X$. Dies ist ein Widerspruch, da $D \neq \emptyset$. Die Implikation von a) nach b) ist somit gezeigt.

Die Implikation von b) nach c) folgt daraus, dass jedes Netz ein universelles Unternetz hat.

Die verbleibende Implikation c) nach a) wurde bereits weiter oben im Beweis von Proposition 5.14 gezeigt. □

Wir kommen nun zum Beweis des Satzes von Tychonoff. Direkt aus der Definition der Produkttopologie folgt: Ist $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und (x_α) ein Netz in $\prod X_i$ (wobei jedes $x_\alpha = (x_\alpha^i)_{i\in i}$ mit $x_\alpha^i \in X_i$), so sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- Das Netz konvergiert gegen $(x^i)_{i\in I}$ (mit $x^i \in X_i$).
- Für alle $i_0 \in I$ gilt: Es sei $(x_\alpha^{i_0})_{\alpha\in D}$ das Netz bestehend aus den i_0-ten Komponenten von x_α. Dann konvergiert $(x_\alpha^{i_0})$ gegen x^{i_0}.

Mit anderen Worten: Die Produkttopologie ist die Topologie der „punktweisen Konvergenz“.

Beweis. (des Satzes von Tychonoff) Ist eine Familie $(X_i)_{i\in I}$ von kompakten Räumen gegeben, so müssen wir nach Proposition 5.18 zeigen, dass jedes nichtleere universelle Netz (x_α) in $\prod_i X_i$ konvergiert. Ist (x_α) so ein universelles Netz und ist $i_0 \in I$, dann ist aber auch das Netz $(x_\alpha^{i_0})$ bestehend aus den i_0-ten Komponenten von x_α universell (dies ist nicht schwer zu zeigen). Da X_{i_0} kompakt ist, hat dieses Netz somit einen Grenzwert x^{i_0}. Nach der vorigen Bemerkung konvergiert dann $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ gegen $(x^i)_{i\in I}$. Das war zu zeigen. □

Der Beweis des Satzes von Tychonoff wird in der Literatur manchmal mit soganannten Ultrafiltern geführt. Das Konzept der (Ultra-)Filter ist äquivalent zum Konzept der (universellen) Netze, dem wir in unserer Vorlesung den Vorzug geben.

Wichtig ist noch folgende Bemerkung: Eine Folge ist genau dann ein universelles Netz, wenn sie schließlich konstant ist. Jede Folge hat aber ein universelles Unternetz. Dies zeigt, dass Unternetze von Folgen etwas anderes sind als Teilfolgen. Ist $D' \to D$ eine finale Abbildung gerichteter Mengen, kann ja trotzdem D' viel „komplizierter“ sein als D.

6. Anwendung/Ausblick: Normierte Räume und der Satz von Banach-Alaoglu

21. 5.12

Der Satz von Tychonoff spielt eine wichtige Rolle bei dem Beweis des Satzes von Banach-Alaoglu aus der Funktionalanalysis. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$. Insbesondere ist V dann ein metrischer und somit auch ein topologischer Raum. Sei

$$B := \{v \in V| \ \ \|v\| \leq 1\}$$

die abgeschlossene Einheitskugel. Wir wollen zuerst zeigen, dass B genau dann kompakt ist, wenn $\dim(V) < \infty$. Wir brauchen drei Lemmata:

Lemma 6.1. *Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent, d.h.: Seien $|\cdot|_1$ und $|\cdot|_2$ zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$. Dann existieren Zahlen $\lambda, \Lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ mit*

$$\lambda|v|_1 \leq |v|_2 \leq \Lambda|v|_1$$

für alle $v \in \mathbb{R}^n$. Insbesondere sind die von diesen Normen erzeugten Topologien gleich, und Mengen, die bezüglich der einen Norm beschränkt sind, sind auch bezüglich der anderen Norm beschränkt.

Beweis. Sei

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i.$$

Zunächst nehmen wir an, dass

$$|v|_1 = |v|_{l^1} = \sum_{i=1}^{n} |v_i|.$$

Wir setzen

$$\Lambda := \max_{i=1,\dots,n} |e_i|_2$$

und rechnen:

$$\begin{aligned} |v|_2 &= \left| \sum_{i=1}^{n} v_i e_i \right|_2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |v_i||e_i|_2 \\ &\leq \Lambda \sum_{i=1}^{n} |v_i| \\ &= \Lambda |v|_{l^1} . \end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$\mathrm{id} : (\mathbb{R}^n, |\cdot|_{l^1}) \to (\mathbb{R}^n, |\cdot|_2)$$

stetig ist. Es ist nicht schwer zu überprüfen, dass $|\cdot|_{l^1}$ äquivalent zur euklidischen Norm ist, sodass

$$S := \{v \in \mathbb{R}^n | \ |v|_{l^1} = 1\}$$

kompakt ist. Dann hat die stetige Abbildung

$$S \overset{\mathrm{id}}{\hookrightarrow} (\mathbb{R}^n, |\cdot|_2) \xrightarrow{|\cdot|_2} \mathbb{R}_{\geq 0}$$

ein Minimum $\lambda \geq 0$. Wäre $\lambda = 0$, würde ein $v \in S$ mit $|v|_2 = 0$ existieren, was nicht möglich ist, weil id injektiv ist. Folglich ist $\lambda > 0$ und

$$\begin{aligned} |v|_2 &= \left| |v|_{l^1} \frac{v}{|v|_{l^1}} \right|_2 \\ &= |v|_{l^1} \left| \frac{v}{|v|_{l^1}} \right|_2 \\ &\geq |v|_{l^1} \lambda\,, \end{aligned}$$

denn $v/|v|_1 \in S$. Wir haben somit bewiesen, dass jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent zu $|\cdot|_1$ ist. Daraus folgt die Aussage des Lemmas. □

Lemma 6.2 (Lemma von Riesz)**.** *Sei* $(V, \|\cdot\|)$ *ein normierter reeller Vektorraum und* $C \subset V$ *ein echter Untervektorraum, der abgeschlossen bzgl.* $\|\cdot\|$ *ist. Sei* $0 < \delta < 1$. *Dann existiert ein* $v \in V \setminus C$ *mit* $\|v\| = 1$ *und*

$$d(v, C) := \inf_{c \in C} \|v - c\| > 1 - \delta.$$

Beweis. Wähle $x \in V \setminus C$. Da C abgeschlossen ist, ist

$$d := d(x, C) > 0,$$

sonst wäre $x \in \overline{C} = C$. Damit gibt es ein $c \in C$ mit

$$\|c - x\| < \frac{d}{1 - \delta},$$

denn $d/(1 - \delta) > d$. Setze

$$v := \frac{x - c}{\|x - c\|} \in V \setminus C$$

sodass $\|v\| = 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} d(v, C) &= \inf_{k \in C} \left\| \frac{x - c}{\|x - c\|} - k \right\| \\ &= \inf_{e = k(x-c) \in C} \left\| \frac{x - c}{\|x - c\|} - \frac{e}{x - c} \right\| \\ &= \frac{1}{\|x - c\|} \left(\inf_{f = e + c \in C} \|x - f\| \right) \\ &> \frac{1 - \delta}{d} d \\ &= 1 - \delta\,. \end{aligned}$$

□

Lemma 6.3. *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und $C \subset V$ ein endlich-dimensionaler Untervektorraum. Dann ist C abgeschlossen bzgl. $\|\cdot\|$.*

Beweis. Gäbe $v \in C \setminus \overline{C}$, würde C in $C \oplus \mathbb{R}v$ nicht abgeschlossen sein, was nicht möglich ist, weil Untervektorräume von endlich-dimensionalen Vektorräume abgeschlossen sind. □

Proposition 6.4. *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$. Die abgeschlossene Einheitskugel B ist genau dann kompakt, wenn* $\dim(V) < \infty$.

Beweis. $\underline{\Leftarrow:}$ B ist kompakt in $\mathbb{R}^n$ bzgl. der euklidischen Norm. Wegen Lemma 6.1 (und mit Heine-Borel) ist B kompakt in $\mathbb{R}^n$ bzgl. einer beliebigen Norm. Daraus folgt die Behauptung für beliebiges endlichdimensionales V.

$\underline{\Rightarrow:}$ Wir nehmen an, dass $\dim(V) = \infty$. Sei $C_i \subset V$ eine unendliche Familie von Untervektoräume mit $C_i \subset C_{i+1}$ und $\dim(C_i) = i$. Mit der Hilfe von Lemma 6.2 und Lemma 6.3 finden wir eine Folge $(c_n) \subset V$, so dass:

(1) $c_n \in C_n \setminus C_{n-1}$,
(2) $\|c_n\| = 1$,
(3) $d(c_n, C_{n-1}) > 1/2$.

Dann hat $(c_n) \subset B$ keine Teilfolge, die Cauchy ist, also keine konvergente Teilfolge. Also: B ist nicht folgenkompakt, damit nicht kompakt (weil B ein metrischer Raum ist, sind kompakt und folgenkompakt äquivalent.) □

Der Satz von Banach-Alaoglu sagt, dass es eine Topologie auf V^* gibt, so dass $B \subset (V^*, \|\cdot\|_{V^*})$ kompakt ist. Wir brauchen einige Definitionen.

Definition 6.5. *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$.* Der Vektorraum der beschränkte Funktionale *ist der normierte Vektorraum*

$$V^* := \{f : V \to \mathbb{R} |\ f \text{ ist linear und es existiert } \lambda > 0 \text{ mit } |f(v)| < \lambda \|v\|\}$$

versehen mit der Norm

$$\|f\| := \sup_{\|v\| \le 1} |f(v)|$$

Wir akzeptieren, dass $\dim(V^*) = \infty$, falls $\dim(V) = \infty$ (vgl. Satz von Hahn-Banach). Insbesondere ist die abgeschlossene Einheitskugel $B \subset (V^*, \|\cdot\|)$ in diesem Fall nicht kompakt, was unangenehm ist. Damit $B \subset V^*$ kompakt wird, definieren wir einfach eine neue Topologie auf V^*

Definition 6.6. *Die* schwach-$*$-Toplogie *auf V^* ist die gröbste Topologie, so dass alle*

$$\begin{aligned} \varphi_v : V^* &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto f(v)\,, \end{aligned}$$

stetig sind.

Die schwach-$*$-Toplogie ist die Topologie der punktweise Konvergenz auf V^*: Ein Netz $(f_\alpha)_{\alpha\in D}$ ist genau dann konvergent, wenn alle $(f_\alpha(v))_{\alpha\in D}$ in

$\mathbb{R}$ konvergieren. Anderseits erhalten wir die injektive Abbildung

$$\begin{aligned} V^* &\hookrightarrow \prod_{v\in V} \mathbb{R} \\ f &\mapsto (f(v))_{v\in V} \end{aligned}$$

und es folgt aus der Definition der Produkttopologie (vgl. Übung 2 auf Blatt 2), dass die schwach-$*$-Toplogie mit der Einschränkung der Produkttopologie übereinstimmt. Wir benutzen diese letzte Beschreibung der schwach-$*$-Toplogie, um der Satz von Banach-Alaoglu zu beweisen:

Satz 6.7. *$B \subset (V^*, \|\cdot\|)$ ist kompakt bzgl. der schwach-$*$-Toplogie.*

Beweis. Es ist klar, dass

$$B \subset \prod_{v\in V} [-\|v\|, \|v\|]_v =: Y,$$

wobei Y kompakt nach Tychonoff ist. Es genügt daher zu zeigen, dass B abgeschlossen in Y ist. Sei

$$(f_\alpha)_{\alpha\in D} \subset B \subset Y$$

ein Netz mit

$$\lim_\alpha f_\alpha = f.$$

Wir wollen zeigen, dass $f \in B$. Wir müssen deshalb überprüfen, dass f linear ist und dass $|f(v)| \leq 1$ für alle $v \in V$ mit $\|v\| \leq 1$. Seien $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(\lambda v + w) &= \lim_\alpha f_\alpha(\lambda v + w) \\ &= \lim_\alpha (\lambda f_\alpha(v) + f_\alpha(w)) \\ &= \lambda \lim_\alpha f_\alpha(v) + \lim_\alpha f_\alpha(w) \\ &= \lambda f(v) + f(w)\,, \end{aligned}$$

wobei die dritte Gleichung die Stetigkeit von Produkt und Summe (als Abbildungen $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) benutzt. Es folgt, dass f linear ist. Schließlich:

$$\begin{aligned} |f(v)| &= |\lim_\alpha f_\alpha(v)| \\ &= \lim_\alpha |f_\alpha(v)| \\ &\leq \lim_\alpha 1 \\ &= 1\,, \end{aligned}$$

wobei die zweite Gleichung die Stetigkeit des Absolutbetrags benutzt. □

23. 5.12

7. Lokalkompakte Räume

Definition 7.1. *Ein topologischer Raum X heißt* lokalkompakt*, falls jeder Punkt $x \in X$ eine kompakte Umgebung besitzt.*

Offensichtlich sind die Räume $\mathbb{R}^n$ lokalkompakt. Jeder diskrete topologische Raum ist lokalkompakt. Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter reeller Vektorraum, so ist V genau dann lokalkompakt, falls $\dim V < \infty$. Dies folgt aus den Aussagen des vorigen Kapitels.

Es sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum. Wir definieren eine Teilmenge U der disjunkten Vereinigung

$$X^+ := X \cup \{\infty\}$$

als offen, falls $U \subset X$ und U offen in X ist oder falls $\infty \in U$ und $X \setminus U \subset X$ kompakt ist. Es folgt aus der Hausdorffeigenschaft (Lokalkompaktheit ist hier nicht notwendig), dass man so wirklich eine Topologie auf X^+ erhält.

Proposition 7.2. *Es sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum. Dann ist X^+ mit der eben definierten Topologie ein kompakter Hausdorffraum.*

Beweis. Ist $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X^+, so gibt es ein $U \in \mathcal{U}$ mit $\infty \in U$. Da $\mathcal{U}$ auch eine offene Überdeckung der kompakten Menge $X \setminus U$ ist, können wir eine endliche Teilüberdeckung auswählen und erhalten zusammen mit U eine endliche Teilüberdeckung von X^+. Die Hausdorffeigenschaft von X^+ folgt (relativ leicht) aus der Lokalkompaktheit von X. □

Wir nennen X^+ mit der oben definierten Topologie die *Einpunktskompaktifizierung* von X. Ist X selbst kompakt, so trägt X^+ die Summentopologie des Raumes X und des einpunktigen topologischen Raumes $\{\infty\}$. Die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$ ist homöomorph zu S^n wie man mit Hilfe der stereographischen Projektion

$$\begin{aligned} S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\} &\to \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

und folgender Proposition beweist:

Proposition 7.3. *Es sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum, Y ein kompakter Hausdorffraum, $p \in Y$ und X homöomorph zu $Y \setminus \{p\}$. Dann ist*

$$X^+ \approx Y\,.$$

Falls X und Y lokalkompakte Hausdorffräume sind und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung ist, so betrachten wir die Abbildung

$$f^+ : X^+ \to Y^+ \;\; f^+|_X = f\,, f^+(\infty) = \infty\,.$$

Diese Abbildung ist nicht automatisch stetig (sei z.B. $X = \mathbb{R}$, $Y = \{p\}$ und $f : X \to Y$ die eindeutig bestimmte Abbildung). Eine hinreichende Bedingung ist aber die folgende:

Definition 7.4. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt* eigentlich*, falls das Urbild jeder kompakten Menge in Y unter f kompakt in X ist.*

Die folgende Tatsache ist nun leicht zu zeigen.

Proposition 7.5. *Ist $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen lokalkompakten Hausdorffräumen, so ist die induzierte Abbildung $f^+ : X^+ \to Y^+$ genau dann stetig, falls f eigentlich ist.*

8. Metrisierbarkeit

Definition 8.1. *Ein topologischer Raum X heißt* normal*, falls folgendes gilt: Seien $A, B \subset X$ disjunkte abgeschlossene Mengen. Dann gibt es offene Teilmengen $U_A, U_B \subset X$ mit $A \subset U_A$, $B \subset U_B$ und $U_A \cap U_B = \emptyset$.*

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass metrische Räume normal sind. Erstaunlicherweise gibt es normale Räume, so dass nicht alle Unterräume (mit der Teilraumtopologie) normal sind.

Lemma 8.2 (Lemma von Urysohn)**.** *Es sei X ein normaler topologischer Raum, $F \subset U \subset X$ Teilmengen von X, wobei F abgeschlossen und U offen ist. Dann gibt es eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$, die auf F konstant gleich 0 und auf $X \setminus U$ konstant gleich 1 ist.*

30. 5.12

Beweis. In einem ersten Schritt konstruieren wir für jede dyadische Zahl $r = \frac{m}{2^n}$, $0 \leq m \leq 2^n$ eine offene Teilmenge $U_r \subset X$, wobei

$$r < s \Rightarrow \overline{U_r} \subset U_s$$

und $F \subset U_0$, $U_1 := U$. Die Konstruktion benutzt Induktion nach n. Falls $n = 0$, so trennen wir die abgeschlossenen Mengen F und $X \setminus U$ durch offene Mengen U_0 und V. Dann gilt $\overline{U_0} \subset U_1$ wie gewünscht.

Im nächsten Schritt wählen wir wieder unter Ausnutzung der Normalität von X eine offene Teilmenge $U_{1/2}$ mit

$$\overline{U_0} \subset U_{1/2}\,,\ \overline{U_{1/2}} \subset U_1\,.$$

Im nächsten Schritt wählen wir offene Mengen $U_{1/4}, U_{3/4} \subset X$ mit

$$\overline{U_0} \subset U_{1/4}\,, \overline{U_{1/4}} \subset U_{1/2}\,,\ \overline{U_{1/2}} \subset U_{3/4}\,,\ \overline{U_{3/4}} \subset U_1\,.$$

Dieses Verfahren setzen wir fort.

Wir definieren nun

$$f : X \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \inf\{r \in [0,1] \mid x \in U_r\}\,,$$

falls $x \in U_1$ und $f(x) = 1$, falls $x \notin U_1$. Offensichtlich gilt $f = 0$ auf F und $f = 1$ auf $X \setminus U$. Zu zeigen bleibt die Stetigkeit von f. Sind $0 < \alpha < 1$ und

$0 < \beta < 1$, so sind die Urbilder

$$\begin{aligned} f^{-1}((-\infty,\alpha)) &= \{x \in X \mid f(x) < \alpha\} = \bigcup_{0 \le r < \alpha} U_r\,, \\ f^{-1}((\beta,\infty)) &= \{x \in X \mid f(x) > \beta\} = \bigcup_{\beta < r \le 1} (X \setminus U_r) = \bigcup_{\beta < s \le 1} (X \setminus \overline{U_s}) \end{aligned}$$

offen in X (bei der letzten Gleichheit verwenden wir $\overline{U_s} \subset U_r$ für alle dyadischen Zahlen $s < r$). Die Offenheit dieser Urbilder für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus (0,1)$ und $\beta \in \mathbb{R} \setminus (0,1)$ sieht man direkt. Da die Mengen der Form $(-\infty,\alpha)$ und (β,∞) eine Subbasis der Topologie auf $\mathbb{R}$ bilden, ist die Stetigkeit von f bewiesen. $\square$

Definition 8.3. *Ein topologischer Raum erfüllt das* zweite Abzählbarkeitsaxiom*, falls eine abzählbare Basis der Topologie existiert.*

Der folgende Satz zeigt die Bedeutung normaler Räume.

Satz 8.4 (Metrisierbarkeitssatz von Urysohn)**.** *Es sei X ein topologischer Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Dann ist X genau dann metrisierbar, wenn er normal und Hausdorffsch ist.*

Beweis. Wir haben bereits in den Übungen gezeigt, dass jeder metrisierbare Raum normal und Hausdorffsch ist. Es sei nun X ein normaler Hausdorffraum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Wir konstruieren einen metrischen Raum M und eine Einbettung

$$f : X \to M$$

(d.h. f induziert einen Homöomorphismus $f : X \to f(X)$). Damit ist X homöomorph zu einem metrisierbaren Raum (nämlich $f(X) \subset M$) und damit selbst metrisierbar.

Es sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis der Topologie auf X. Falls $U, V \in \mathcal{B}$ mit $\overline{U} \subset V$, so wählen wir (mit Hilfe des Lemmas von Urysohn) eine stetige Funktion $f_{U,V} : X \to [0,1]$, die auf U gleich 0 und auf $X \setminus V$ konstant gleich 1 ist. Wir betrachten nun die Abbildung

$$f : X \to M := \prod_{U,V \in \mathcal{B}, \overline{U} \subset V} [0,1]\,,\ x \mapsto (f_{U,V}(x))\,.$$

Wir behaupten, dass f eine Einbettung ist. Offensichtlich ist f stetig (da die einzelnen Komponenten stetig sind).

Um zu zeigen, dass f ein Homöomorphismus ist, zeigen wir, dass die induzierte Abbildung $f : X \to f(X)$ abgeschlossen ist, d.h. ist $C \subset X$ abgeschlossen, dann auch $f(C) \subset f(X)$. (Wir behaupten nicht, dass $f(C) \subset M$ abgeschlossen ist).

Sei dazu $(c_\alpha)_{\alpha \in I}$ ein Netz in C, so dass das Netz $f(c_\alpha)$ gegen einen Punkt in $f(X)$ konvergiert. Dann existiert ein $x \in X$ mit $\lim f(c_\alpha) = f(x)$. Wir zeigen, dass $x \in C$, also $f(x) \in f(C)$. Aus dieser Betrachtung folgt dann, dass $f(C)$ in $f(X)$ abgeschlossen ist.

Falls aber $x \notin C$, so gibt es eine offene Menge $V \in \mathcal{B}$ mit $x \in V$ und $V \cap C = \emptyset$. Wegen der Normalität von X (wegen der Hausdorffeigenschaft von X ist $\{x\} \subset X$ abgeschlossen) existiert nun noch eine offene Umgebung U von x mit $\overline{U} \subset V$

Durch eventuelle Verkleinerung von U können wir annehmen, dass $U \in \mathcal{B}$. Das Netz $f_{U,V}(c_\alpha)$ ist nun konstant gleich 1 (denn $C \subset X \setminus V$) und kann daher nicht gegen $f_{U,V}(x) = 0$ konvergieren. Widerspruch.

Die Abbildung f ist auch injektiv: Falls $x, y \in X$ und $x \neq y$, so gibt es offene Basismengen $U, V \in \mathcal{B}$ mit $x \in U$, $y \in X \setminus V$ und $\overline{U} \subset V$ und dann trennt bereits die Funktion $f_{U,V}$ die Punkte x und y.

Die Abbildung f ist somit als Homöomorphismus auf ihr Bild nachgewiesen. Als abzählbares Produkt von metrisierbaren Räumen ist M selbst metrisierbar (siehe Übungsblatt 5, Aufgabe 1). Damit ist alles gezeigt.

□

Eine weitere Anwendung des Lemmas von Urysohn ist das folgende fundamentale Resultat über die Erweiterung stetiger Abbildungen.

Satz 8.5 (Erweiterungssatz von Tietze)**.** *Es sei X ein normaler Raum und $F \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Ist $f : F \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert eine stetige Fortsetzung $g : X \to \mathbb{R}$ von f, d.h. $g|_F = f$. Wir können außerdem erreichen, dass $\sup_{x \in F} f(x) = \sup_{x \in X} g(x)$ und $\inf_{x \in F} f(x) = \inf_{x \in X} g(x)$.*

Die Funktion g wird als Limes einer gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge konstruiert.

Definition 8.6. *Es sei X ein topologischer Raum und (Y, d) ein metrischer Raum. Eine Folge von Abbildungen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : X \to Y$ konvergiert* gleichmäßig *gegen $f : X \to Y$, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit*

$$d(f_n(x), f(x)) < \epsilon\,,$$

für alle $x \in X$ und alle $n \geq N$.

Mit dem üblichen $\epsilon/3$-Argument beweist man:

Proposition 8.7. *Es seien X, Y wie eben und (f_n) eine gleichmäßig gegen die Funktion $f : X \to Y$ konvergente Folge stetiger Abbildungen. Dann ist auch f stetig.*

Wir kommen nun zum Beweis des Satzes von Tietze. Sei zunächst f beschränkt. Ohne Einschränkung sei $0 \leq f(x) \leq 1$ für alle $x \in X$ und $\sup f = 1$, $\inf f = 0$. Nach dem Lemma von Urysohn existiert eine stetige Abbildung $g_1 : X \to [0, 1/3]$ mit

$$g_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in F \text{ und } f(x) \leq 1/3\,, \\ 1/3, & \text{falls } x \in F \text{ und } f(x) \geq 2/3\,. \end{cases}$$

Wir setzen $f_1 := f - g_1|_F$ und bemerken, dass $0 \leq f_1(x) \leq 2/3$ für alle $x \in F$. Induktiv nehmen wir an, wir haben bereits eine stetige Abbildung

$f_n : F \to \mathbb{R}$ konstruiert mit $0 \le f_n(x) \le (2/3)^n$ für alle $x \in F$. Wir finden dann eine Funktion $g_{n+1} : X \to [0, 1/3 \cdot (2/3)^n]$, wobei

$$g_{n+1}(x) = \begin{cases} 0, \text{ falls } x \in F \text{ und } f_n(x) \le 1/3 \cdot (2/3)^n\,, \\ 1/3 \cdot (2/3)^n, \text{ falls } x \in F \text{ und } f_n(x) \ge 2/3 \cdot (2/3)^n\,. \end{cases}$$

Wir setzen $f_{n+1} := f_n - g_{n+1}|_F$.

Nach Konstruktion konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n$$

stetiger Funktionen gleichmäßig gegen eine Funktion $g : X \to [0, 1]$. Daher ist g insbesondere stetig. Falls $x \in F$, so gilt nach Konstruktion

$$f_n(x) = f(x) - (g_1(x) + g_2(x) + \ldots + g_n(x))$$

und $0 \le f_n(x) \le (2/3)^n$. Somit gilt $g|_F = f$ und die Konstruktion von g ist beendet. Die Bedingung an die Schranken von g ist ebenfalls erfüllt, denn $0 \le g(x) \le 1$ für alle $x \in X$.

Es sei nun f unbeschränkt, sagen wir, f ist unbeschränkt in beide Richtungen. Wir wählen einen Homöomorphismus $h : (-\infty, \infty) \to (0, 1)$ und erweitern die Funktion $h \circ f : F \to (0, 1)$ zu einer stetigen Funktion $g : X \to [0, 1]$ wie eben beschrieben. Wir können nun nicht einfach mit dem Inversen von h komponieren, da g durchaus die Werte 0 oder 1 annehmen kann. Wir müssen daher g auf der Menge

$$C := \{x \in X \mid g(x) = 0 \text{ oder } g(x) = 1\}$$

noch abändern, jedoch ohne dabei g auf F zu ändern. Die Menge C ist abgeschlossen und wegen $g = f$ auf F gilt $C \cap F = \emptyset$. Nach Urysohn existiert eine stetige Funktion $k : X \to [0, 1]$, die auf C konstant gleich 0 und auf F konstant gleich 1 ist. Wir ersetzen nun g durch die Funktion

$$\widetilde{g} : x \mapsto k(x) \cdot g + \frac{1}{2}(1 - k(x))\,.$$

Das Bild dieser Funktion liegt in $(0, 1)$ und sie stimmt auf F mit $h \circ f$ überein. Daher ist $h^{-1} \circ \widetilde{g}$ die gewünschte Erweiterung von f. Die anderen Fälle (wenn f nur in eine Richtung unbeschränkt ist) behandelt man analog.

4.6.12

9. Quotientenräume (Verklebung von Räumen), Simplizialkomplexe

Dieser Abschnitt ist einem wichtigen Konstruktionsverfahren topologischer Räume gewidmet, dem „Verkleben". Sei allgemein X ein topologischer Raum, Y eine Menge und $f : X \to Y$ eine surjektive Abbildung. Die *Quotiententopologie* oder auch *Finaltopologie* auf Y bzgl. f ist die feinste Topologie, so dass f stetig ist. Eine Teilmenge $U \subset Y$ ist also offen bezüglich dieser Topologie genau dann, falls $f^{-1}(U) \subset X$ offen ist (denn Urbildnehmen ist mit Schnitt- und Vereinigungsbildung verträglich). Eine surjektive

Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt *Identifizierung*, falls die Topologie auf Y genau die Finaltopologie bezüglich f ist.

Proposition 9.1. *Die Komposition von Identifizierungen ist wieder eine Identifizierung. Eine surjektive Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann eine Identifizierung, falls folgendes gilt: Ist Z ein topologischer Raum und $g : Y \to Z$ eine Abbildung, so ist g genau dann stetig, falls $g \circ f : X \to Z$ stetig ist.*

Ein wichtiges Beispiel ist das folgende: Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einem topologischen Raum X. Dann können wir $X/\sim$ mit der Quotiententopologie (bzgl. der kanonischen Abbildung $X \to X/\sim$) versehen, den entstehenden topologischen Raum nennen wir einen *Quotientenraum*. Quotientenräume von kompakten (zusammenhängenden, wegzusammenhängenden) Räumen sind ebenfalls kompakt (zusammenhängend, wegzusammenhängend). Ist X ein Hausdorffraum, so muss der Quotientenraum $X/\sim$ aber nicht Hausdorffsch sein (betrachte z.B. die Relation $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ auf $X := \mathbb{R}$).

Ist $A \subset X$ eine nichtleere Teilmenge des topologischen Raumes X, so bezeichnet X/A den Quotientenraum bzgl. der Äquivalenzrelation

$$x \sim y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x, y \in A \text{ oder} \\ (x \notin A \text{ oder } y \notin A) \text{ und } x = y\,, \end{array} \right. .$$

d.h. die Äquivalenzklassen sind A und die einpunktigen Mengen $\{x\}$ mit $x \in X \setminus A$.

Proposition 9.2. *Ist X ein normaler Hausdorffraum und $A \subset X$ abgeschlossen, so ist X/A ebenfalls normal und Hausdorffsch.*

Beispiel. Wir betrachten die Sphären $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit der Unterraumtopologie. Der Quotientenraum bzgl. der von der Relation $x \sim y \Leftrightarrow x = -y$ erzeugten Äquivalenzrelation heißt der *n-dimensionale reell-projektive Raum* $\mathbb{R}P^n$. Eine alternative Beschreibung erhält man wie folgt: Wir betrachten die Äquivalenzrelation auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $D^n \subset \mathbb{R}^n$, die jeweils gegenüberliegende Punkte auf dem Rand S^{n-1} identifiziert (und natürlich jeden Punkt mit sich selbst). Wir behaupten, dass der entstehende Quotientenraum homöomorph zu $\mathbb{R}P^n$ ist. Dazu betrachten wir D^n als die obere Hemisphäre von S^n. Die entsprechende Inklusion $i : D^n \to S^n$ kann man explizit als $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, \sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2})$ definieren. Die (stetige) Komposition $D^n \to S^n \to \mathbb{R}P^n$ faktorisiert durch $D^n/\sim$ und wir erhalten eine Abbildung $k : D^n/\sim \to \mathbb{R}P^n$, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} D^n & \xrightarrow{i} & S^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n/\sim & \xrightarrow{k} & \mathbb{R}P^n \end{array}$$

kommutativ macht. Nach Proposition 9.1 ist k stetig. Offensichtlich ist k auch bijektiv. Da $D^n/\sim$ kompakt (klar) und $\mathbb{R}P^n$ Hausdorff ist (dies ist leicht direkt zu zeigen), ist k ein Homöomorphismus.

Wir erwähnen noch einige besonders wichtige Beispiele von Quotientenräumen. Sind X, Y topologische Räume, $A \subset X$ eine Teilmenge und ist $f : A \to Y$ eine stetige Abbildung, so bezeichnet $Y \cup_f X$ die *Anheftung von X entlang f*. Sie ist definiert als der Quotientenraum der disjunkten Vereinigung $X \dot\cup Y$ (falls $X \cap Y \neq \emptyset$, so macht man die Räume künstlich disjunkt, indem man zu $X \times \{0\}$ und $Y \times \{1\}$ übergeht) - versehen mit der Summentopologie - bzgl. der kleinsten Äquivalenzrelation auf $X \dot\cup Y$, die jedes $a \in A$ mit $f(a) \in Y$ identifiziert. In diesem Sinne können wir X/A auch als $Y \cup_p X$ schreiben, wobei Y ein einpunktiger Raum und $p : A \to Y$ die eindeutig bestimmte Abbildung ist. Man beweist leicht

Proposition 9.3. *Ist $Y \cup_f X$ ein Anheftungsraum und $A \subset X$ abgeschlossen, so ist $Y \hookrightarrow Y \cup_f X, y \mapsto [y]$ ein Homöomorphismus auf einen abgeschlossenen Teilraum und $X \setminus A \hookrightarrow Y \cup_f X, x \mapsto [x]$ ist ein Homöomorphismus auf einen offenen Teilraum.*

Ist $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung, so ist der *Abbildungszylinder* Z_f von f der Verkleberaum $Y \cup_{f_0} (X \times [0, 1])$, wobei $f_0 : X \times \{0\} = X \to Y$ gleich f ist. Wir identifizieren in dieser Situation oft X mit $X \times \{1\} \subset Z_f$ und Y mit $Y \subset Z_f$. Der *Abbildungskegel* C_f ist der Quotientenraum $Z_f/(X \times \{1\})$.

6.6./11.6.12

Dieses Kapitel bietet auch eine gute Gelegenheit, Simplizialkomplexe einzuführen. Sie stellen eine enge Verbindung zwischen Topologie und Kombinatorik her.

Definition 9.4. *Ein* abstrakter Simplizialkomplex *ist ein Paar (X, Σ) bestehend aus einer total geordneten Menge X und einer Teilmenge $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ der Potenzmenge von X (diese wird Menge der* abstrakten Simplizes *genannt) mit den folgenden Eigenschaften:*

- *Jedes Simplex $\sigma \in \Sigma$ ist nichtleer und endlich.*
- *Ist ein Simplex $\sigma \in \Sigma$ gegeben, so sind alle nichtleeren Teilmengen von σ ebenfalls Simplizes.*

Ist $\sigma \in \Sigma$ ein Simplex, so definieren wir als die Dimension *von σ die Zahl $|\sigma| - 1$ (d.h. die Mächtigkeit von σ minus 1). Hier lassen wir uns von der Vorstellung leiten, dass ein k-dimensionales Simplex $k + 1$ Ecken hat. Die Teilmengen von $\sigma \in \Sigma$ heißen* Seiten *von σ (und sind nach Definition wieder Elemente von Σ). Die nulldimensionalen Simplizes heißen auch* Ecken *und die eindimensionalen Simplizes* Kanten *von (X, Σ). (In unserer Definition brauchen nicht alle Elemente von X als Ecken aufzutreten). Wir nennen einen Simplizialkomplex (X, Σ)* endlich*, falls die Menge der Simplizes Σ endlich ist. Dies ist gleichbedeutend damit, dass die Menge der Ecken von (X, Σ) endlich ist.*

Wir bezeichnen mit $[n]$ die total geordnete Menge $\{0, 1, \ldots, n\}$. Wir definieren den abstrakten Simplizialkomplex („volles n-dimensionales Simplex“) Δ^n_{abstr} als $([n], \mathcal{P}([n]))$, d.h. jede Teilmenge von $[n]$ ist ein Simplex.

Wir können jedem abstrakten Simplizialkomplex wie folgt einen topologischen Raum zuordnen. Wir benutzen dabei folgende allgemeine Schreibweise: Es seien $v_0, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ affin unabhängige Vektoren (d.h. die Familie $(v_1 - v_0, \ldots, v_k - v_0)$ ist linear unabhängig). Dann setzen wir

$$\langle v_0, \ldots, v_k \rangle := \{\sum_{i=0}^{k} t_i v_i \mid 0 \le t_i \le 1, \sum t_i = 1\} \subset \mathbb{R}^n .$$

Dies ist das von den Vektoren $v_0, \ldots, v_k$ *aufgespannte* (geometrische, affine) k-Simplex. Dieses ist mit der von $\mathbb{R}^n$ induzierten Topologie ein kompakter topologischer Raum. Jeder Punkt in $\langle v_0, \ldots, v_k \rangle$ ist durch seine *baryzentrischen Koordinaten* $t_0, \ldots, t_k$ eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen mit $e_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ (wobei $0 \le i \le n$) den i-ten kanonischen Basisvektor und setzen

$$\Delta^n := \langle e_0, \ldots, e_n \rangle \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Dies ist der *Standard-n-Simplex.*

Ist $k \le n$, so induziert jede injektive ordnungserhaltende Abbildung

$$\phi : \{0, 1, \ldots, k\} \to \{0, 1, \ldots, n\}$$

eine Einbettung (d.h. Homöomorphismus auf das Bild)

$$i_\phi : \Delta^k \to \Delta^n ,$$

gegeben durch

$$\sum_{i=0}^{k} t_i e_i \mapsto \sum_{i=0}^{k} t_{\phi(i)} e_{\phi(i)} .$$

Ist nun ein abstrakter Simplizialkomplex $S := (X, \Sigma)$ gegeben, so setzen wir

$$T := \dot{\bigcup}_{\sigma \in \Sigma} \Delta_\sigma$$

(disjunkte Vereinigung), wobei Δ_σ das geometrische Standard-Simplex der Dimension $\dim \sigma$ ist. Der Raum T ist mit der Summentopologie versehen: Eine Teilmenge $U \subset T$ ist also genau dann offen, falls für alle $\sigma \in \Sigma$ die Menge $U \cap \Delta_\sigma$ offen in Δ_σ ist. Wir führen auf T die Äquivalenzrelation $\sim$ wie folgt ein: Seien $\sigma, \tau \in \Sigma$ mit $\tau \subset \sigma$. Wir identifizieren σ und τ mit den Mengen $\{0, \ldots, \dim(\sigma)\}$ und $\{0, \ldots, \dim(\tau)\}$ mittels der eindeutig bestimmten ordnungserhaltenden Bijektionen (hier benutzen wir, dass X total geordnet ist!) und erhalten eine von der Inklusion $\tau \subset \sigma$ induzierte ordnungserhaltende Inklusion

$$\phi : \{0, \ldots, \dim(\tau)\} \to \{0, \ldots, \dim(\sigma)\} .$$

Nun identifizieren wir jedes $x \in \Delta_\tau$ mit $i_\phi(x) \in \Delta_\sigma$ (die Abbildung i_ϕ wurde weiter oben definiert). Wir nennen den Quotientenraum $T/\sim$ die *geometrische Realisierung* von S. Diese wird mit $|S|$ bezeichnet und der zu

S gehörende *geometrische Simplizialkomplex* genannt. Offensichtlich ist $|S|$ ein normaler Raum und dieser ist genau dann kompakt, wenn die Menge der Simplizes Σ endlich ist (siehe Aufgabe 2 auf Blatt 8).

Proposition 9.5. $|\Delta^n_{abstr}| \approx \Delta^n$.

Beweis. Statt eines allgemeinen Beweises behandeln wir das konkrete Beispiel $n = 2$. Der abstrakte Simplizialkomplex $|\Delta^2_{abstr}|$ hat als zu Grunde liegende Menge $X = [2] = \{0, 1, 2\}$ und jede Teilmenge von X bildet ein abstraktes Simplex. Die Menge der Ecken ist also $\{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$, die Menge der Kanten $\{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}\}$ und die Menge der 2-Simplizes gleich $\{\{0, 1, 2\}\}$. Die geometrische Realisierung entsteht also aus der disjunkten Vereinigung von 3 geometrischen 0-Simplizes Δ^0 (also Punkten), 3 geometrischen 1-Simplizes Δ^1 und einem geometrischen 2-Simplex Δ^2 durch gewisse Identifizierungen. Durch diese werden aber genau die 0-Simplizes mit den Ecken von Δ^2 und die 1-Simplizes mit den Kanten von Δ^2 identifiziert, so dass insgesamt der topologische Raum Δ^2 entsteht. $\square$

In der nächsten Proposition sehen wir, wie man einen formalen Beweis für derartige Aussagen führen kann.

Proposition 9.6. *Wir betrachten den abstrakten Simplizialkomplex* $S := ([n], \Sigma := \mathcal{P}([n]) \setminus \{[n]\})$*, also das volle n-Simplex ohne das top-dimensionale Simplex. Wir behaupten, dass* $|S|$ *homöomorph zu Teilmenge*

$$\partial\Delta^n := \{\sum_{i=0}^{n} t_i e_i \mid 0 \leq t_i \leq 1, \sum t_i = 1, \text{ mindestens ein } t_i = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

ist (die Bezeichnung $\partial\Delta^n$ *bedeutet hier nicht, dass wir den Rand von* Δ^n *als Teilmenge von* $\mathbb{R}^{n+1}$ *betrachten, denn dieser Rand wäre leer. Daher die explizite Definition). Dieser Homöomorphismus wird induziert von der Abbildung*

$$\begin{aligned} \psi : T = \dot{\bigcup}_{\sigma\in\Sigma} \Delta_\sigma &\to \partial\Delta^n \\ \Delta_\sigma \ni x &\mapsto i_\phi(x) \in \Delta^n . \end{aligned}$$

Hier ist wieder $\phi : \{0, \ldots, \dim \sigma\} \to \{0, \ldots, n\}$ *die ordnungserhaltende Abbildung, die nach der (eindeutig bestimmten) Identifikation von* $\sigma \subset \{0, \ldots, n\}$ *mit* $\{0, \ldots, \dim \sigma\}$ *entsteht. Es folgt unmittelbar aus der Konstruktion der obigen Äquivalenzrelation auf* T*, dass* ψ *eine Abbildung* $|S| = T/\sim \to \partial\Delta^n$ *induziert. Diese Abbildung ist nach Definition der Quotiententopologie stetig und bijektiv, also als Abbildung von einem kompakten Raum in einen Hausdorffraum ein Homöomorphismus.*

Definition 9.7. *Ein topologischer Raum heißt* triangulierbar*, wenn er homöomorph zu einem geometrischen Simplizialkomplex (also der geometrischen Realisierung eines abstrakten Simplizialkomplexes) ist. Die konkrete Angabe so eines Homöomorphismus bezeichnet man als* Triangulierung.

Sehr viele in der Praxis auftretenden topologischen Räume sind triangulierbar. Wenn man Triangulierungen konkret angeben möchte, sollte man beachten, dass in einem abstrakten Simplizialkomplex (und damit in jeder Triangulierung eines topologischen Raumes) jedes Simplex durch seine Ecken eindeutig bestimmt ist. Inbesondere lässt sich die Kreislinie $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ nicht mit zwei 1-Simplizes triangulieren.

Beispielsweise sind die Sphären $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ triangulierbar. Denn S^n ist homöomorph zur geometrischen Realisierung des Simplizialkomplexes aus Proposition 9.6.

Zum Beweis dieser Tatsache diskutieren wir allgemeiner konvexe Körper im $\mathbb{R}^n$.

Definition 9.8. *eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt* konvex*, falls mit je zwei Punkten $x, y \in K$ auch die Verbindungsstrecke $\{tx + (1-t)y \mid 0 \leq t \leq 1\}$ in K liegt. Ein* konvexer Körper *im $\mathbb{R}^n$ ist eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge, so ist die* konvexe Hülle *von K der Durchnitt aller konvexen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, die K enthalten (da $\mathbb{R}^n$ selbst konvex ist, bildet man hier den Durchschnitt über ein nichtleeres Mengensystem).*

Da der Durchschnitt konvexer Mengen offenbar wieder konvex ist, ist die konvexe Hülle von $K \subset \mathbb{R}^n$ selbst konvex. Sie ist die kleinste konvexe Menge, die K enthält.

Proposition 9.9. *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein konvexer Körper und $0 \in \operatorname{int}(K)$. Dann schneidet jeder Strahl im $\mathbb{R}^n$ mit Anfangspunkt 0 den Rand von K in höchstens einem Punkt. Ist K zusätzlich beschränkt (also kompakt), dann schneidet jeder Strahl den Rand von K in genau einem Punkt.*

Beweis. Es sei R ein Strahl mit Anfangspunkt 0 und es seien $p, q \in R \cap K$ verschiedene Punkte. Wir zeigen, dass mindestens einer der Punkte p oder q im Inneren von K liegt (daraus folgt, dass nicht beide Punkte auf dem Rand von K liegen können). Es sei q auf dem Strahl R weiter von 0 entfernt als p. Da $0 \in \operatorname{int}(K)$ gibt es eine offene Kugel $B \subset K$, die 0 enthält. Es sei $C_q(B)$ die Vereinigung aller Strecken, die q und einen Punkt aus B verbinden. Da K konvex ist, gilt $C_q(B) \subset K$. Der Punkt p liegt dann im Inneren von $C_q(B)$ und somit auch im Inneren von K.

Sei nun K kompakt. Ist $R \subset \mathbb{R}^n$ ein Strahl mit Anfangspunkt 0, so enthält R Punkte aus dem Inneren von K (da $0 \in \operatorname{int}(K)$) und Punkte aus $\mathbb{R}^n \setminus K$ (sonst wäre K unbeschränkt). Da $R \approx [0, \infty)$ zusammenhängend ist, muss aber R noch weitere Punkte enthalten (denn $\operatorname{int}(K)$ und $\mathbb{R}^n \setminus K$ sind beide offen). Es gilt aber $\mathbb{R}^n \setminus (\operatorname{int}(K) \cup (\mathbb{R}^n \setminus K)) = \partial K$, somit muss R auch Punkte aus ∂K enthalten. □

Proposition 9.10. *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränkter (also auch kompakter) konvexer Körper mit $0 \in \operatorname{int}(K)$. Dann ist die Abbildung*

$$f : \partial K \to S^{n-1}, \; x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$$

ein Homöomorphismus.

Beweis. Die Abbildung f ist als Komposition der Inklusion $\partial K \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus 0$ mit der radialen Retraktion $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ stetig. Die vorhergehende Proposition zeigt, dass f bijektiv ist. Damit ist f ein Homöomorphismus, da ∂K kompakt und S^{n-1} Hausdorffsch ist. $\square$

Proposition 9.11. *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter konvexer Körper mit nichtleerem Inneren. Dann ist K homöomorph zum abgeschlossenen Einheitsball $D^n = \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n$ und ∂K ist homöomorph zu $S^{n-1} = \partial D^n$.*

Beweis. Nach einer Translation können wir annehmen, dass $0 \in \mathrm{int}(K)$. Es sei $f : \partial K \to S^{n-1}$ wie in der vorhergehenden Proposition. Wir definieren $F : D^n \to K$ durch

$$x \mapsto \|x\| f^{-1}(\frac{x}{\|x\|})\,, \text{ falls } x \neq 0\,,$$

und $F(0) = 0$. Die Funktion F ist injektiv und surjektiv und stetig auf $D^n \setminus \{0\}$. Stetigkeit von F an $0 \in D^n$ folgt daraus, dass $\|x\|$ für alle $x \in K$ durch eine feste Zahl $M \in \mathbb{R}$ nach oben beschränkt ist und somit $\|F(x)\| \leq M\|x\|$ für alle $x \in K$. Somit ist F ein Homöomorphismus, da D^n kompakt und K Hausdorffsch ist. Die zweite Behauptung in der Proposition folgt nun unmittelbar. $\square$

Da Δ^n homöomorph zum kompakten konvexen Körper

$$K = \langle e_1, \ldots, e_n, -e_1 - \ldots - e_n \rangle \subset \mathbb{R}^n$$

mit nichtleerem Inneren ist (hier ist $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis im $\mathbb{R}^n$), folgt nun:

Korollar 9.12. *$\Delta^n \approx D^n$, $\partial\Delta^n \approx S^{n-1}$.*

Insbesondere sind (mit den Propositionen 9.5 und 9.6) D^n und S^{n-1} triangulierbar.

Ist $S = (X, \Sigma)$ ein abstrakter Simplizialkomplex und X endlich, so kann man sich die geometrische Realisierung $|S|$ auch folgendermaßen vorstellen. Es sei $|X| = n$, der Einfachheit schreiben wir $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ und es seien n affin unabhängige Punkte $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Wir betrachten nun die Vereinigung all jener affinen Simplizes $\langle x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \rangle \subset \mathbb{R}^n$ mit $\{i_1, \ldots, i_k\} \in \Sigma$.

Die Vereinigung all dieser affinen Simplizes ist (mit der von $\mathbb{R}^n$ induzierten Topologie) homöomorph zu $|S|$.

Definition 9.13. *Eine Teilmenge $T \subset \mathbb{R}^n$ heißt* (geometrischer) Simplizialkomplex*, falls T Vereinigung von affinen Simplizes $\sigma_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in I$, mit der folgenden Eigenschaft ist: Der Schnitt $\sigma_i \cap \sigma_j$ zweier dieser Simplizes ist entweder leer oder eine gemeinsame Seite von σ_i und σ_j.*

Es ist nicht schwer zu sehen, dass in diesem Fall T homöomorph zur geometrischen Realisierung eines abstrakten Simplizialkomplexes ist. Die zu

Grunde liegende Menge ist einfach die Menge aller Ecken von Simplizes, die in T vorkommen (mit einer beliebigen totalen Ordnung).

13.6.12

10. Homotopie

Definition 10.1. *Es seien $f, g : X \to Y$ zwei stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen X und Y. Wir sagen f ist* homotop *zu g, falls es eine stetige Abbildung*

$$H : X \times [0,1] \to Y$$

gibt mit $H(-,0) = f$ und $H(-,1) = g$. In diesem Falle schreiben wir $f \simeq g$.

Proposition 10.2.
- *Die Relation „f ist homotop zu g" ist eine Äquivalenzrelation.*
- *Es seien $f, g : X \to Y$, $h : X' \to X$ und $k : Y \to Y'$ stetige Abbildungen. Gilt $f \simeq g$, so auch $f \circ h \simeq g \circ h$ und $k \circ f \simeq k \circ g$.*

Beweis. Wir diskutieren nur die Transitivität der Homotopierelation (die anderen Behauptungen sind recht leicht zu zeigen). Es sei $H : X \times [0,1] \to Y$ eine Homotopie von $f : X \to Y$ nach $g : X \to Y$ und $G : X \times [0,1] \to Y$ eine Homotopie von $g : X \to Y$ nach $h : X \to Y$. Wir behaupten, dass dann

$$K : X \times [0,1] \to Y\,,\ (x,t) \mapsto \begin{cases} H(x,2t)\,, & \text{falls } 0 \le t \le 1/2 \\ G(x,2t-1)\,, & \text{falls } 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

eine Homotopie von f nach h ist. Zu zeigen bleibt nur, dass K wohldefiniert und stetig ist. Wohldefiniertheit ist klar (denn $H(-,1) = G(-,0)$). Die Stetigkeit gilt wegen der folgenden allgemeinen Tatsache („stückweise definierte stetige Abbildungen"): Es sei T ein topologischer Raum und (T_i) eine Überdeckung von T durch endlich viele abgeschlossene Mengen. Sind dann $f_i : T_i \to S$ stetige Abbildungen in einen festen topologischen Raum S und stimmen für alle i, j die Abbildungen f_i und f_j auf dem Schnitt $T_i \cap T_j$ überein, dann ist die Abbildung $T \to S$, $t \mapsto f_i(t)$, falls $t \in T_i$, stetig. □

Beispiel.
- Es sei $Y \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge (d.h. mit je zwei Punkten $x, y \in Y$ liegt auch die Strecke von x nach y in Y). Dann sind zwei Abbildungen $f, g : X \to Y$ immer homotop, denn sie lassen sich durch eine *lineare Homotopie*

$$H(x,t) := tg(x) + (1-t)f(x)$$

  verbinden.
- Ist $X = \{p\}$ ein einpunktiger Raum, so sind Homotopien $H : X \times [0,1] \to Y$ nichts anderes als *Wege* in Y mit Anfangspunkt $H(p,0)$ und Endpunkt $H(p,1)$. Solche Wege schreiben wir einfacher als Abbildungen $\gamma : [0,1] \to Y$. Ist $\eta : [0,1] \to Y$ ein weiterer Weg

und gilt $\gamma(1) = \eta(0)$, so können wir den *zusammengesetzten Weg* $\gamma \cdot \eta : [0,1] \to Y$ mit

$$t \mapsto \begin{cases} \gamma(2t)\,, & 0 \le t \le 1/2 \\ \eta(1-2t)\,, & 1/2 \le t \le 0 \end{cases}$$

definieren. Wie oben zeigt man die Stetigkeit von $\gamma \cdot \eta$ („erst γ, dann η").

Definition 10.3. *Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ ist eine* Homotopieäquivalenz*, falls eine stetige Abbildung $g : Y \to X$ existiert mit $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. In diesem Fall nennt man g ein* Homotopieinverses *zu f. Existiert eine Homotopieäquivalenz $X \to Y$, so nennen wir X und Y* homotopieäquivalent*, geschrieben $X \simeq Y$.*

Die Relation „X und Y sind homotopieäquivalent" definiert eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der topologischen Räume. Symmetrie und Reflexivität sind klar. Transitivität sieht man so: Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung mit Homotopieinverser $g : Y \to X$ und ist $h : Y \to Z$ eine Abbildung mit Homotopieinverser $k : Z \to Y$, so gilt

$$(gk)(hf) = g(kh)f \simeq g \circ \mathrm{id}_Y \circ f \simeq \mathrm{id}_X$$

und entsprechend ist $(hf)(gk) \simeq \mathrm{id}_Z$. Die Äquivalenzklassen bezüglich dieser Äquivalenzrelation nennt man *Homotopietypen.*

Definition 10.4. *Ein topologischer Raum heißt* kontrahierbar*, wenn er homotopieäquivalent zum einpunktigen Raum ist.*

Ein Raum X ist offensichtlich genau dann kontrahierbar, wenn die Identität $X \to X$ homotop zu einer Abbildung $X \to X$ ist, deren Bild aus genau einem Punkt besteht. Dabei kann dieser Punkt beliebig in X gewählt werden. Nach dem obigen Beispiel sind also nichtleere konvexe Teilmengen im $\mathbb{R}^n$ immer kontrahierbar.

Der Beweis der folgenden Tatsache ist eine leichte Übung.

Lemma 10.5. *Es sei X ein topologischer Raum und Y ein kontrahierbarer topologischer Raum. Dann sind alle stetigen Abbildungen $X \to Y$ homotop.*

Proposition 10.6. *Die Sphären $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sind nicht kontrahierbar.*

Wir führen den Beweis an dieser Stelle nur für $n = 0, 1$ explizit aus. Die Fälle $n \geq 2$ können wir mit den Mitteln dieser Vorlesung leider noch nicht behandeln.

Beweis. Für $n = 0$ gilt $S^0 = \{\pm 1\} \subset \mathbb{R}$. Angenommen

$$\mathrm{id} : S^0 \to S^0$$

ist homotop zur konstanten Abbildung $c : S^0 \to S^0$ mit Wert -1. Es sei $H : S^0 \times [0,1] \to S^0$ eine entsprechende Homotopie. Dann definiert aber

$H(+1,-) : [0,1] \to S^0$ einen Weg von $+1$ nach -1 und dies widerspricht der Tatsache, dass S^0 nicht zusammenhängend ist.

Wir zeigen mit Hilfe des Begriffes der Windungszahl, dass S^1 nicht kontrahierbar ist. Angenommen, S^1 sei kontrahierbar. Dann ist die Identität $\mathrm{id} : S^1 \to S^1$ also homotop zu einer konstanten Abbildung $S^1 \to S^1$. Fassen wir S^1 als Teilmenge von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ auf, dann ist die Abbildung

$$\gamma_1 : S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}\,,\ x \mapsto x$$

homotop zu einer konstanten Abbildung

$$\gamma_0 : S^1 \to \mathbb{C} \setminus 0\,.$$

Jeder stetigen Abbildung $\gamma : S^1 \mapsto \mathbb{C}\setminus\{0\}$ kann man aber eine Windungszahl

$$W(\gamma) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z}$$

zuordnen (wir fassen hier γ als geschlossene Kurve in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ auf) und man zeigt in der Analysis mit Hilfe des Satzes von Stokes, dass diese Windungszahl sich unter einer Homotopie von γ nicht ändert (und außerdem ganzzahlig ist). Da aber $W(\gamma_1) = 1$ und $W(\gamma_0) = 0$, kann γ_1 nicht homotop zu γ_0 sein. □

Definition 10.7. *Es sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Wir nennen A einen* Retrakt *von X, falls es eine* Retraktion *$r : X \to A$ gibt, d.h. r ist stetig und $r|_A = \mathrm{id}_A$. Wir nennen A einen* Deformationsretrakt *von X, falls es eine Retraktion $r : X \to A$ gibt, so dass die Abbildung $i \circ r \simeq \mathrm{id}_X$. Dabei ist $i : A \to X$ die Inklusion. Weiterhin nennt man A einen* starken Deformationsretrakt *von X, falls es eine Retraktion $r : X \to A$ gibt, so dass $i \circ r \simeq \mathrm{id}_X$ mittels einer Homotopie, die die Punkte in A nicht bewegt.*

Ist $A \subset X$ ein Deformationsretrakt, so sind A und X homotopieäquivalent. Als homotopieinverses Paar von Abbildungen kann man die Inklusion $i : A \hookrightarrow X$ und eine Retraktion $r : X \to A$ mit $i \circ r \simeq \mathrm{id}_X$ nehmen. Dann ist $r \circ i = \mathrm{id}_A$ und $i \circ r$ ist zur Identität homotop.

Beispiel. Es sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann ist Y ein starker Deformationsretrakt des Abbildungszylinders $Z_f = Y \cup_{f_0} X \times [0,1]$. Eine Deformationsretraktion ist durch die Homotopien

$$H_1 : Y \times [0,1] \to Y\,, (y,t) \mapsto y$$

und

$$H_2 : (X \times [0,1]) \times [0,1] \to X \times [0,1]\,, ((x,s),t) \mapsto (x, s(1-t))$$

gegeben.

18.6.12

11. Die Fundamentalgruppe

Definition 11.1. *Es seien $f, g : X \to Y$ stetige Abbildungen und $A \subset X$ eine Teilmenge. Wir nennen f und g homotop* relativ zu *A, falls es eine Homotopie $H : X \times [0,1] \to Y$ von f nach g gibt mit $H(a,t) = H(a,0)$ für alle $a \in A$, $t \in [0,1]$. Wir schreiben dann $f \simeq g$* rel A.

Beispielsweise ist $A \subset X$ genau dann ein starker Deformationsretrakt, falls die Identität $\mathrm{id}_X : X \to X$ homotop relativ zu A zu einer Abbildung $f : X \to X$ mit $f(X) = A$ ist.

Lemma 11.2 (Reparametrisierungslemma). *Es seien $\phi_1, \phi_2 : [0,1] \to [0,1]$ stetige Abbildung, die auf $\{0,1\}$ übereinstimmen. Es sei $F : P \times [0,1] \to Y$ eine Homotopie. Setzen wir $G_i(p,t) := F(p, \phi_i(t))$, so sind die Abbildungen $G_1, G_2 : P \times [0,1] \to Y$ homotop relativ zu $P \times \{0,1\}$.*

Beweis. Die gesuchte Homotopie $H : (P \times [0,1]) \times [0,1] \to Y$ ist durch

$$(p,t,s) \mapsto F(p, s\phi_2(t) + (1-s)\phi_1(t))$$

gegeben. □

Wir wenden dieses Lemma im folgenden für einpunktige Räume P, d.h. für Wege in Y an.

Es sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ ein festgewählter Punkt („Basispunkt"); wir sprechen auch von einem *punktierten Raum.* Wir definieren nun

$$\pi_1(X, x_0)$$

als die Menge aller geschlossenen Wege $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ von x_0 nach x_0 modulo der Äquivalenzrelation

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 :\Leftrightarrow \gamma_1 \simeq \gamma_2 \text{ rel } \{0,1\}\,,$$

d.h. wir identifizieren geschlossene Wege, die sich über geschlossene in x_0 basierte Wege ineinander homotopieren lassen. Die durch $\gamma : [0,1] \to X$ repräsentierte Klasse in $\pi_1(X, x_0)$ bezeichnen wir mit $[\gamma]$.

Es sei c_{x_0} der konstante Wege in X mit Wert x_0. Ist γ ein Weg in X, so bezeichnet $\gamma^{-1} : [0,1] \to X$, $t \mapsto \gamma(1-t)$ den zu γ *inversen Weg.* Für in x_0 basierte Wege $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to X$ bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} \gamma_1 \cdot \gamma_2 : [0,1] &\to X \\ t &\mapsto \begin{cases} \gamma_1(2t)\,, 0 \le t \le 1/2 \\ \gamma_2(2t-1)\,, 1/2 \le t \le 1 \end{cases} \end{aligned}$$

die *Hintereinanderausführung* von γ_1 und γ_2.

Proposition 11.3. *Die Verknüpfung*

$$(\gamma_1, \gamma_2) \mapsto \gamma_1 \cdot \gamma_2$$

induziert eine Gruppenstruktur auf $\pi_1(X, x_0)$ mit neutralem Element $[c_{x_0}]$.

Beweis. Ist $\gamma_1 \simeq \gamma_1'$ rel $\{0,1\}$ und $\gamma_2 \simeq \gamma_2'$ rel $\{0,1\}$, so gilt auch $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \simeq \gamma_1' \cdot \gamma_2'$ rel $\{0,1\}$. Dazu setzt man die entsprechenden Homotopien horizontal zusammen. Wir erhalten also eine wohldefinierte Verknüpfung auf $\pi_1(X, x_0)$. Das Assoziativgesetz folgt aus

$$\gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_3) \simeq (\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_3 \text{ rel } \{0,1\}$$

(für in x_0 basierte Schleifen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$). Diese Homotopie erhält man aus dem Reparametrisierungslemma, wobei wir als P einen einpunktigen Raum wählen, die Homotopie $F : P \times [0,1] \to Y$ als $\gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_3)$, die Abbildung $\phi_1 : [0,1] \to [0,1]$ als die Identität und die Abbildung ϕ_2 durch

$$t \mapsto \begin{cases} 2t, 0 \leq t \leq 1/4 \\ t + 1/4, 1/4 \leq t \leq 1/2 \\ (t+1)/2, 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

definieren. Die Neutralität von $[c_{x_0}]$ folgt aus

$$c_{x_0} \cdot \gamma \simeq \gamma \simeq \gamma \cdot c_{x_0} \text{ rel } \{0,1\}$$

und dies beweist man ganz ähnlich wieder mit dem Reparametrisierungslemma. Die Existienz von Inversen folgt aus

$$\gamma^{-1} \cdot \gamma \simeq c_{x_0} \simeq \gamma \cdot \gamma^{-1} \text{ rel } \{0,1\}\,.$$

Hier benutzen wir das Reparametrisierungslemma mit $F(p,t) := \gamma(t)$,

$$\phi_1(t) := \begin{cases} 2t\,, \; 0 \leq t \leq 1/2 \\ 1 - 2t\,, \; 1/2 \leq t \leq 1\,. \end{cases}$$

und $\phi_2(t) := 0$. □

Wir schreiben die Verknüpfung auf $\pi_1(X, x_0)$ ebenfalls als $\cdot$, also

$$[\gamma_1] \cdot [\gamma_2] := [\gamma_1 \cdot \gamma_2]\,.$$

Wir nennen die $\pi_1(X, x_0)$ mit der soeben eingeführten Gruppenstruktur die *Fundamentalgruppe* von (X, x_0). Ist $P = \{p\}$ ein einpunktiger Raum, so gilt offensichtlich

$$\pi_1(P, p) = 1\,.$$

Dabei bezeichnet hier und im folgenden 1 die Gruppe mit einem (dem neutralen) Element.

Offensichtlich hängt $\pi_1(X, x_0)$ nur von der Wegekomponenten von X ab, die x_0 enthält. Die Abhängigkeit vom Basispunkt x_0 ist jedoch subtiler.

Proposition 11.4. *Es seien $x_0, x_1 \in X$ Basispunkte in der gleichen Wegzusammenhangskomponente von X. Dann induziert jeder Weg $\eta : [0,1] \to X$ von x_0 nach x_1 einen Isomorphismus*

$$\psi_\eta : \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)\,.$$

Es gilt $\psi_\eta = \psi_{\eta'}$, falls $\eta \simeq \eta'$ rel $\{0,1\}$.

Beweis. Der Isomorphismus ist durch

$$\psi_\eta : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)\,, [\gamma] \mapsto [\eta^{-1} \cdot \gamma \cdot \eta]$$

gegeben (dabei ist γ eine in x_1 basierte geschlossene Kurve in X). Wir können auf der rechten Seite innerhalb der eckigen Klammern auf runde Klammern verzichten, denn

$$(\eta^{-1} \cdot \gamma) \cdot \eta \simeq \eta^{-1} \cdot (\gamma \cdot \eta) \text{ rel } \{0, 1\}$$

wie man ähnlich zu oben mit dem Reparametrisierungslemma zeigt. Zur Wohldefiniertheit nehmen wir an, $[\gamma'] = [\gamma]$. Man zeigt dann leicht, dass $\eta^{-1} \cdot \gamma \cdot \eta \simeq \eta^{-1} \cdot \gamma' \cdot \eta$ rel $\{0, 1\}$. Ganz ähnlich beweist man, dass $\psi_\eta = \psi_{\eta'}$, falls $\eta \simeq \eta'$ rel $\{0, 1\}$. Die Tatsache, dass ψ_η ein Homomorphismus ist folgt aus

$$\psi_\eta([\gamma] \cdot [\gamma']) = [\eta^{-1} \cdot \gamma \cdot \gamma' \cdot \eta] = [\eta^{-1} \cdot \gamma \cdot \eta \cdot \eta^{-1} \cdot \gamma' \cdot \eta] = \psi_\eta([\gamma]) \cdot \psi_\eta([\gamma'])\,,$$

wobei wir $\eta \cdot \eta^{-1} \simeq c_{x_0}$ rel $\{0, 1\}$ benutzt haben. Ebenso einfach zeigt man $\psi_\eta([c_{x_0}]) = [c_{x_1}]$. Man zeigt leicht, dass $\psi_{\eta^{-1}}$ ein Inverses zu ψ_η ist. □

Ist η' ein anderer (möglicherweise nicht zu η homotoper) Weg von x_0 nach x_1, so definiert $(\eta')^{-1} \cdot \eta$ ein Element $\kappa \in \pi_1(X, x_0)$ und es gilt für alle $g \in \pi_1(X, x_0)$, dass

$$\psi_{\eta'}(g) = \lambda \cdot \psi_\eta(g) \cdot \kappa^{-1} \in \pi_1(X, x_1)\,.$$

Somit gilt im allgemeinen $\psi_\eta \neq \psi_{\eta'}$, falls $\pi_1(X, x_1)$ nicht abelsch ist.

Beispiel.

- Wir werden später sehen, dass $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.
- Auch werden wir zeigen, dass $\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (mit einem beliebigen Basispunkt $x_0 \in \mathbb{R}P^2$).
- Sei G eine beliebige Gruppe. Man kann zeigen, dass es einen Simplizialkomplex X mit Basispunkt $x_0 \in X$ gibt, so dass $\pi_1(X, x_0) \cong G$. Insofern ist das Gebiet der Topologie mindestens so reichhaltig wie das der Gruppentheorie.

20.6.12

Es seien nun (X, x_0) und (Y, y_0) punktierte Räume. Wir nennen eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ *basispunkterhaltend* oder *punktiert*, falls $f(x_0) = y_0$. Ist $f : X \to Y$ eine punktierte Abbildung, so definieren wir eine Abbildung

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

durch die Setzung

$$f_*([\gamma]) := [f \circ \gamma]\,.$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn ist $H : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ eine Homotopie von γ nach γ' relativ $\{0, 1\}$, so ist $f \circ H$ eine Homotopie von $f \circ \gamma$ nach $f \circ \gamma'$ relativ $\{0, 1\}$. Indem man die Definition der Gruppenverknüpfung auf π_1 und die Definition des neutralen Elementes einsetzt, erhält man:

Proposition 11.5. *Die Abbildung $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ ist ein Gruppenhomomorphismus. Sind $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ und $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ punktierte stetige Abbildungen, so gilt*

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* .$$

Für die (offensichtlich basispunkterhaltende) Abbildung $\mathrm{id}_X : X \to X$ haben wir

$$\mathrm{id}_{X*} = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)} .$$

Sind weiterhin $f, g : X \to Y$ punktierte stetige Abbildungen und ist $f \simeq g \text{ rel } \{\mathrm{x}_0\}$, so haben wir

$$f_* = g_* .$$

Definition 11.6. *Wir nennen einen topologischen Raum X* einfach zusammenhängend*, falls X wegzusammenhängend ist und $\pi_1(X, x_0) = 1$ (Gruppe mit einem Element) für ein (und damit nach Proposition 11.4 für alle) $x_0 \in X$.*

Beispiel. Wir haben bereits früher gesehen (und werden später nochmal zeigen), dass S^1 nicht einfach zusammenhängend ist.

Proposition 11.7. *Ist X zusammenziehbar, so ist X einfach zusammenhängend.*

Dass X wegzusammenhängend ist, ist klar. Zum Beweis von $\pi_1(X, x_0) = 1$ sei $P = \{p\}$ ein einpunktiger Raum und $i : P \to X$ und $f : X \to P$ ein Paar von Abbildungen mit $i \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ i \simeq \mathrm{id}_P$ (letzterest ist ohnehin klar, da P nur einen Punkt hat). Wir erhalten induzierte Abbildungen

$$i_* : \pi_1(P, p) \to \pi_1(X, i(p)) , f_* : (X, i(p)) \to (P, p) .$$

Offensichtlich ist $f \circ i \simeq \mathrm{id}_P \text{ rel } \{\mathrm{p}\}$ und somit haben wir mit Proposition 11.5

$$f_* \circ i_* = (f \circ i)_* = (\mathrm{id}_P)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(P,p)} .$$

Da $\pi_1(P, p) = 1$, haben wir also bereits eine Hälfte der letzten Proposition gezeigt. Dass $i_* \circ f_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$ ist jedoch nicht so einfach zu zeigen, da wir nicht annehmen können, dass $i \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ relativ zu x_0 (d.h. es könnte sein, dass der Basispunkt x_0 während der Homotopie bewegt werden muss, vergleiche dazu auch Aufgabe 3 auf Blatt 10).

Die Aussage von Proposition 11.7 folgt aber (mit $Y := P$ und (X, x_0), f wie eben) aus:

Proposition 11.8. *Es seien X und Y wegzusammenhängende Räume und es sei $x_0 \in X$ ein Basispunkt. Ist $f : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz, so induziert f einen Isomorphismus*

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0)) .$$

Diese Proposition ist insofern allgemeiner als für den Beweis von Proposition 11.7 benötigt als wir hier nicht einmal annehmen, dass f ein Homotopieinverses $g : Y \to X$ hat mit $g(f(x_0)) = x_0$. Insbesondere habe wir unter den Annahmen von Proposition 11.8 nicht einmal einen Kandidaten für eine zu f_* inverse Abbildung $\pi_1(Y, f(x_0)) \to \pi_1(X, x_0)$.

Beweis von Proposition 11.8 . Es sei $g : Y \to X$ homotopieinvers zu f. Wir setzen $y_0 := f(x_0)$ und $x_1 := g(y_0)$. Wir erhalten Abbildungen

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, x_1) \,.$$

Die Abbildung $g \circ f$ ist homotop zu id_X, jedoch nicht unbedingt rel $\{\mathrm{x}_0\}$. Wir können also nicht unmittelbar folgern, dass $g_* \circ f_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$. Daher argumentieren wir so: Es sei

$$H : X \times [0, 1] \to X$$

eine Homotopie von id_X nach $g \circ f$. Es sei

$$\eta : [0, 1] \to X$$

der Weg von x_0 nach x_1, den der Punkt x_0 während dieser Homotopie beschreibt. Ist nun $\gamma : [0, 1] \to X$ eine in x_0 basierte Schleife, so gilt (hier hilft eine Zeichnung)

$$g_* \circ f_*([\gamma]) = \psi_\eta([\gamma]) \in \pi_1(X, x_1)$$

und da $\psi_\eta : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ ein Isomorphismus ist (siehe Proposition 11.4), ist $g_* \circ f_*$ ebenfalls ein Isomorphismus. Insbesondere ist f_* injektiv und g_* surjektiv. Da $g : Y \to X$ ebenfalls eine Homotopieäquivalenz ist, zeigt ein analoges Argument, dass g_* injektiv ist. Damit ist g_* ein Isomorphismus. Weil $g_* \circ f_*$ ein Isomorphismus ist, gilt dies schließlich auch für f_*. □

Beispiel. $\mathbb{R}^n$ ist zusammenziehbar und somit einfach zusammenhängend.

Proposition 11.9. *Für $n \geq 2$ ist die Sphäre S^n einfach zusammenhängend.*

Beweis. Es sei $x_0 \in S^n$ und $\gamma : [0, 1] \to S^n$ eine in x_0 basierte Schleife. Falls es einen Punkt $p \in S^n$ gibt, der nicht im Bild von γ liegt, benutzen wir die Tatsache, dass $S^n \setminus \{p\} \approx \mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend ist, um γ relativ zu $\{0, 1\}$ zu einem konstanten Weg zu homotopieren.

Es gibt allerdings für alle $n \geq 2$ surjektive stetige Abbildungen $[0, 1] \to S^n$ (und somit auch surjektive geschlossene Wege). Stichwort: Peano-Kurve oder space filling curve (siehe Internet). Daher argumentieren wir für den allgemeinen Fall anders:

Es seien U, bzw. V die Sphäre S^n ohne Nord, bzw. Südpol. Wir wählen als Basispunkt in S^n einen beliebigen Punkt $x \in U \cap V$. Ist nun $\gamma : [0, 1] \to S^n$ eine in x basierte Schleife, so ist $\gamma^{-1}(U), \gamma^{-1}(V)$ eine offene Überdeckung von $[0, 1]$. Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Lebesguezahl für diese Überdeckung. Es sei $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $1/N < \lambda$. Dann gilt für alle $0 \leq k \leq N - 1$:

$$\gamma([k/N, (k + 1)/N]) \subset U \,, \text{ oder } \gamma([k/N, (k + 1)/N]) \subset V \,.$$

Wir finden also endlich viele Zahlen $0 = z_0 < z_1 < \ldots < z_l = 1$, so dass die Bilder $\gamma([z_i, z_{i+1}]) \subset S^n$ entweder ganz in U oder ganz in V liegen und zwar abwechselnd. Insbesondere ist $\gamma(z_i) \in U \cap V$ für alle $i = 0, \ldots, l$. Es sei η_i ein Weg in $U \cap V$, der x mit $\gamma(z_i)$ verbindet ($i = 1, 2, \ldots, l-1$). An dieser Stelle geht die Voraussetzung $n \geq 2$ entscheidend ein - denn nur dann ist $U \cap V$ wegzusammenhängend. Wir setzen nun

$$\gamma_i := \gamma|_{[z_i, z_{i+1}]} \,.$$

Nach Präkomposition mit einem monoton wachsenden Homöomorphismus $[0,1] \to [z_i, z_{i+1}]$ können wir γ_i als auf $[0,1]$ definierten Weg auffassen. Es gilt nun

$$\gamma \simeq \gamma_0 \cdot \eta_1^{-1} \cdot \eta_1 \cdot \gamma_1 \cdot \eta_2^{-1} \cdot \eta_2 \cdot \ldots \cdot \eta_{l-1}^{-1} \cdot \gamma_{l-1} \text{ rel } \{0,1\}$$

Aber $\gamma_0 \cdot \eta_1^{-1}$, $\eta_1 \cdot \gamma_1 \cdot \eta_2^{-1}$, etc. sind alle in x basierte Schleifen, die entweder ganz in U oder ganz in V verlaufen. Da $U \approx \mathbb{R}^n$ und $V \approx \mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend sind, sind diese Schleifen also alle homotop zur konstanten Schleife c_x relativ $\{0,1\}$. Also gilt in $\pi_1(S^n, x)$:

$$[\gamma] = [\gamma_0 \cdot \eta_1^{-1}] \cdot [\eta_1 \cdot \gamma_2 \cdot \eta_2^{-1}] \cdot \ldots \cdot [\eta_{l-1}^{-1} \cdot \gamma_{l-1}] = 1$$

und dies war zu beweisen. □

Die Bezeichnungen π_0 und π_1 kommen von folgender alternativer Sichtweise auf unsere Definitionen: Es sei $n \geq 0$. Wir wählen auf $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ den festen Basispunkt $p := (1, 0, 0, \ldots, 0)$. Ist (X, x_0) ein punktierter Raum, so definiert man ganz allgemein

$$\pi_n(X, x_0)$$

als die Menge der basispunkterhaltenden Abbildungen $S^n \to X$ modulo der Äquivalenzrelation, die zwei Abbildungen f und g genau dann identifiziert, falls $f \simeq g$ rel {p}. Man zeigt leicht, dass diese Definition für $n = 1$ mit der vorherigen übereinstimmt. Falls $n = 0$, so ist nach dieser Definition $\pi_0(X, x_0)$ genau die Menge der Wegzusammenhangskomponenten von X und zwar unabhängig von der Wahl von x_0. Daher kann man bei $\pi_0(X, x_0)$ auch auf die Angabe des Basispunktes verzichten. Wir haben weiterhin gesehen, wie man auf $\pi_1(X, x_0)$ eine Gruppenstruktur definiert. Ein ähnliches Vorgehen führt zu Gruppenstrukturen auf $\pi_n(X, x_0)$ für alle $n \geq 1$. Man kann zeigen, dass diese sogar abelsch ist, falls $n \geq 2$. Auf $\pi_0(X)$ ist jedoch keine Gruppenstruktur definiert. Die Berechnung der Gruppen $\pi_n(X, x_0)$ ist im allgemeinen ein schwieriges und fundamentales Problem der algebraischen Topologie. Beispielsweise sind die Gruppen $\pi_n(S^2, p)$ nicht für alle $n \geq 2$ explizit berechnet. (Für $n = 1$ kommt die einelementige Gruppe heraus, weil S^2 einfach zusammenhängend ist).

25.6.12

12. Die Sprache der Kategorientheorie

Dieser Abschnitt fasst einige Begriffsbildungen der Kategorientheorie zusammen, die in der Topologie, aber auch in anderen Bereichen der Mathematik immer wieder auftauchen.

Wir behandeln hier die Kategorientheorie weniger als eigenständige mathematische Disziplin, sondern als Formulierung vereinheitlichender mathematischer Prinzipien.

Definition 12.1. *Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus den folgenden Daten:*

- *Eine Klasse* $\operatorname{ob}\mathcal{C}$ *von* Objekten *von $\mathcal{C}$.*
- *Für je zwei Objekte $A, B \in \mathcal{C}$ eine (möglicherweise leere) Menge* $\operatorname{mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ *von* Morphismen *von A nach B. Ist $f \in \operatorname{mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$, so schreiben wir auch $f : A \to B$ oder $A \xrightarrow{f} B$ (dies heißt nicht unbedingt, dass f eine Abbildung ist!) und nennen A die* Quelle *(*Domain*) von f und B das* Ziel *(*Codomain*), geschrieben $A = \operatorname{dom} f$, $B = \operatorname{cod} f$. Wir bezeichnen die Klasse aller Morphismen in $\mathcal{C}$ mit* $\operatorname{mor}\mathcal{C}$.
- *Eine Operation, die jedem Paar (f,g) von Morphismen aus $\mathcal{C}$ mit $\operatorname{cod} f = \operatorname{dom} g$ einen Morphismus $g \circ f \in \operatorname{mor}\mathcal{C}$, die „Komposition von g und f“ zuordnet. Diese hat die Eigenschaften $\operatorname{dom}(g \circ f) = \operatorname{dom} f$, $\operatorname{cod}(g \circ f) = \operatorname{cod} g$. Weiterhin ist diese Operation assoziativ, d.h. falls $f, g, h \in \operatorname{mor}\mathcal{C}$, $\operatorname{cod} f = \operatorname{dom} g$, $\operatorname{cod} g = \operatorname{dom} h$, so haben wir $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.*
- *Eine Operation, die jedem $A \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$ einen Morphismus $A \xrightarrow{1_A} A$ zuordnet, den* Identitätsmorphismus. *Dieser hat die Eigenschaften $f \circ 1_A = f$ und $1_A \circ g = g$ für alle Morphismen $f, g \in \operatorname{mor}\mathcal{C}$ mit $\operatorname{dom} f = A$ und $\operatorname{cod} g = A$.*

Wir machen die folgenden Bemerkungen:

- In dieser Definition benutzen wir die Begriffe „Klasse“, „Operation“und das Zeichen $\in$ im naiven Sinne, ohne Bezug auf die Mengenlehre. Insbesondere sind $\operatorname{ob}\mathcal{C}$ und $\operatorname{mor}\mathcal{C}$ nicht notwendigerweise Mengen. Dies wird in den nachfolgenden Beispielen deutlich.
- $\operatorname{mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ und $\operatorname{mor}_{\mathcal{C}}(A',B')$ sind disjunkt, falls $A \neq A'$ oder $B \neq B'$.
- Die Einheitsmorphismen 1_A für Objekte $A \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$ sind eindeutig bestimmt: Ist $1'_A$ ein weiterer Einheitsmorphismus, so ist $1_A = 1_A \circ 1'_A = 1'_A$.

Definition 12.2. *Wir nennen einen Morphismus $A \xrightarrow{f} B$ in einer Kategorie $\mathcal{C}$ einen* Isomorphismus, *falls in $\mathcal{C}$ ein Morphismus $B \xrightarrow{g} A$ existiert mit $f \circ g = 1_B$ und $g \circ f = 1_A$. Wir schreiben dann statt g auch f^{-1} und nennen diesen Morphismus das* Inverse *von f.*

Diese Begriffsbildungen leben von der Fülle an Beispielen in allen Bereichen der Mathematik.

Beispiel.

- Die Kategorie Set der Mengen hat als Objekte alle Mengen (in irgendeinem Modell der Mengenlehre), und als Morphismen $A \xrightarrow{f} B$ die Abbildungen $f : A \to B$. Die Verknüpfung $f \circ g$ ist durch die übliche Komposition von Abbildungen definiert und ist $A \in \operatorname{ob} Set$ eine Menge, so definieren wir 1_A als die Identität $A \to A$. In dieser Kategorie sind die invertierbaren Morphismen genau die bijektiven Abbildungen.
- Wir haben die Kategorien Grp von Gruppen und Gruppenhomomorphismen, Rng von Ringen und Ringhomomorphismen, Mod_R von R-Moduln (für einen festen Ring R) und R-linearen Abbildungen, $Vect_k$ von k-Vektorräumen (k ein fester Körper) und k-linearen Abbildungen, etc.
- Wir bezeichnen mit Top die Kategorie der topologischen Räume und der stetigen Abbildungen und mit Met die Kategorie der metrischen Räume und der stetigen Abbildungen. Mit $KompHaus$ bezeichnen wir die Kategorie der kompakten Hausdorffräume und der stetigen Abbildungen und mit Top^* die Kategorie der punktierten topologischen Räume und basispunkterhaltenden stetigen Abbildungen.
- Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit nur einem Objekt e und mit der Eigenschaft, dass jeder Morphismus in $\mathcal{C}$ ein Isomorphismus ist. Dann ist insbesondere $\mathcal{C}$ durch die Menge $\operatorname{mor} \mathcal{C}$ und die Verknüpfung $\circ$ von Morphismen sowie die Identität $1_e \in \operatorname{mor} \mathcal{C}$ eindeutig bestimmt und das Tripel $(\operatorname{mor} \mathcal{C}, \circ, 1_e)$ bildet eine Gruppe. Allgemeiner definieren wir ein *Gruppoid* als eine Kategorie, in der alle Morphismen Isomorphismen sind. Ein wichtiges Beispiel ist das *Fundamentalgruppoid* $\pi(X)$ eines topologischen Raumes X. Dieses hat als Objekte die Punkte aus X und sind $x, y \in X$ Objekte von $\pi(X)$, so besteht die Menge von Morphismen $x \longrightarrow y$ aus der Menge von Wegen $\gamma : [0,1] \to X$ von x nach y, wobei wir γ und γ' identifizieren, falls $\gamma \simeq \gamma'$ rel $\{0,1\}$. Man zeigt ganz ähnlich wie in der früheren Diskussion der Fundamentalgruppe, dass $\pi(X)$ wirklich ein Gruppoid ist. Das Fundamentalgruppoid vermeidet also die Festlegung auf einen Basispunkt in X, allerdings erhält man auch nur weniger algebraische Struktur (nämlich die eines Gruppoides und nicht einer Gruppe).
- Jede partiell geordnete Menge $(P, \leq)$ können wir als Kategorie interpretieren mit $\operatorname{ob} \mathcal{C} = P$ und $(p \to q) \in \operatorname{mor} \mathcal{C}$ genau dann, falls $p \leq q$. Für Objekte $p, q \in P$ gibt es also höchstens einen Morphismus $p \to q$. Für $p \in P$ ist der Identitätsmorphismus der Morphismus $p \to p$. Dieser existiert, da $p \leq p$.

- Die Kategorie *Rel* von Mengen und Relationen hat die selben Objekte wie *Set*, aber Morphismen $A \to B$ sind in dieser Kategorie Relationen zwischen A und B, d.h. Teilmengen von $A \times B$. Sind $R \subset A \times B$ und $S \subset B \times C$ Relationen, so ist die Komposition $A \xrightarrow{S \circ R} C$ die Relation $\{(a,c) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ mit } (a,b) \in R, (b,c) \in S\}$ zwischen A und C. In dieser Kategorie sind die Isomorphismen wieder genau die bijektiven Abbildungen (dies muss man sich kurz überlegen).
- Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\operatorname{mor}\mathcal{C}$, so dass
  - $f \sim g \Rightarrow \operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g, \operatorname{cod} f = \operatorname{cod} g$.
  - Ist $f \sim g$ und ist $k \in \operatorname{mor}\mathcal{C}$ mit $\operatorname{cod} f = \operatorname{dom} k$ (bzw. $\operatorname{dom} f = \operatorname{cod} k$), so gilt $k \circ f \sim k \circ g$ (bzw. $f \circ k \sim g \circ k$).

  Dann können wir eine neue Kategorie $\mathcal{C}/\sim$ definieren mit $\operatorname{ob}(\mathcal{C}/\sim) := \operatorname{ob}\mathcal{C}$ und $\operatorname{mor}(\mathcal{C}/\sim) := (\operatorname{mor}\mathcal{C})/\sim$. So erhalten wir zum Beispiel die *Homotopiekategorie* $HTop = Top/\sim$, wobei zwei Morphismen f und g genau dann äquivalent sind, falls $f \simeq g$. Die Isomorphismen in dieser Kategorie werden durch Homotopieäquivalenzen repräsentiert. Die Kategorie $HTop^*$ hat als Objekte die punktierten topologischen Räume und als Morphismen basispunkterhaltende Homotopieklassen von basispunkterhaltenden stetigen Abbildungen.

Definition 12.3. *Es seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Ein* Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *besteht aus zwei Abbildungen (die beide F genannt werden)* $\operatorname{ob}\mathcal{C} \to \operatorname{ob}\mathcal{D}$ *und* $\operatorname{mor}\mathcal{C} \to \operatorname{mor}\mathcal{D}$, *so dass* $\operatorname{dom} F(f) = F(\operatorname{dom} f)$ *und* $\operatorname{cod} F(f) = F(\operatorname{cod} f)$ *für alle* $f \in \operatorname{mor}\mathcal{C}$, $F(1_A) = 1_{F(A)}$ *für alle* $A \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$ *und* $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ *für alle komponierbaren Morphismen* $g, f \in \operatorname{mor}\mathcal{C}$.

Beispiel.

- Für die Kategorien *Grp*, *AbGp*, *Rng*, *Top*, ..., gibt es Funktoren U in die Kategorie *Set*, den *Vergissfunktor*. Ist z.B. G eine Gruppe, so ist $U(G)$ die unterliegende Menge von G und ist $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, so ist $U(f) : U(G) \to U(H)$ die Abbildung f, betrachtet als Abbildung zwischen Mengen.

27.6.12

- Sind G und H Gruppen (die wir wie vorhin erklärt als Kategorien auffassen), so ist ein Funktor $G \to H$ nichts anderes als ein Gruppenhomomorphismus.
- Der *Potenzmengenfunktor* $P : Set \to Set$ schickt eine Menge A zur Menge $P(A)$ aller Teilmengen von A. Falls $f : A \to B$ eine Abbildung ist, so ist $P(f)(X) := f(X) \subset B$ für alle $X \subset A$.
- Sind P und Q partiell geordnete Mengen (die wir wie vorhin erklärt als Kategorien auffassen), so ist ein Funktor $P \to Q$ nichts anderes als eine ordnungserhaltende Abbildung $P \to Q$.

- π_0 definiert einen Funktor $Top \to Set$ und auch einen Funktor $HTop \to Set$. π_1 definiert einen Funktor $Top^* \to Grp$ und auch einen Funktor $HTop^* \to Grp$. Ähnlich definiert das Fundamentalgruppoid $\pi(X)$ einen Funktor $Top \to Gpd$, wobei Gpd die Kategorie der Gruppoide und der Funktoren zwischen ihnen ist.

In vielen Situationen ist es nützlich, die Definition von Funktoren noch wie folgt zu verallgemeinern:

Definition 12.4. *Es seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Ein Funktor im Sinne von Definition 12.3 heißt* kovarianter Funktor*. Ein* kontravarianter Funktor *$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ist degegen definiert durch zwei Abbildungen $F : \mathrm{ob}\,\mathcal{C} \to \mathrm{ob}\,\mathcal{D}$, $F : \mathrm{mor}\,\mathcal{C} \to \mathrm{mor}\,\mathcal{D}$, wobei aber nun folgendes gilt: Ist $f : A \to B$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$, so gilt $\mathrm{dom}\,F(f) = F(B)$ und $\mathrm{cod}\,F(f) = F(A)$, d.h. F dreht Pfeile um. Es gilt außerdem für alle Morphismen $f : A \to B$, $g : B \to C$ in $\mathrm{mor}\,\mathcal{C}$, dass $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$. Weiterhin fordern wir wie früher $F(1_A) = 1_{F(A)}$ für alle $A \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$.*

Beispiel.

- Wir haben einen kontravarianten Funktor $P^* : Set \to Set$ mit der gleichen Wirkung auf den Objekten von Set wie der Potenzmengenfunktor, jedoch ist $P^*(f)(Y) := f^{-1}(Y)$ für alle $Y \subset B$.
- Es sei k ein Körper. Dann gibt es einen kontravarianten Funktor $* : Vect_k \to Vect_k$, der einem k-Vektorraum V den dualen Vektorraum $V^* = \hom_k(V, k)$ zuordnet und einer linearen Abbildung $f : V \to W$ die lineare Abbildung $f^* : W^* \to V^*$ definiert durch $f^*(\phi) := \phi \circ f$ für alle $\phi \in \hom_k(V, k)$.
- Wir erhalten einen kontravarianten Funktor C von der Kategorie der kompakten Hausdorffräume und stetigen Abbildungen in die Kategorie der kommutativen C^*-Algebren mit Eins und $*$-Homomorphismen zwischen diesen, indem wir einem Raum X die Algebra $C(X)$ der stetigen komplexwertigen Funktionen $X \to \mathbb{C}$ zuordnen und einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ den $*$-Homomorphismus $C(f) : C(Y) \to C(X), \varphi \mapsto \varphi \circ f$

Definition 12.5. *Es seien $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren. Eine* natürliche Transformation *$\alpha : F \to G$ ist eine Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ob}\,\mathcal{C} & \to & \mathrm{mor}\,\mathcal{D} \\ A & \mapsto & \alpha_A \end{array}$$

so dass $F(A) \xrightarrow{\alpha_A} G(A)$ *für alle* $A \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$ *und so dass für jeden Morphismus* $A \xrightarrow{f} B$ *in* $\mathcal{C}$ *das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ {\scriptstyle\alpha_A}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_B}\downarrow \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B) \end{array}$$

kommutiert. Ist $H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *ein weiterer Funktor und* $\beta : G \to H$ *eine natürliche Transformation, so können wir die Komposition* $\beta \circ \alpha : F \to H$ *bilden, indem wir* $(\beta \circ \alpha)_A := \beta_A \circ \alpha_A$ *setzen. Wir haben auch eine natürliche Transformation* $1_F : F \to F$*, wobei* $(1_F)_A$ *als* $F(A) \xrightarrow{1_{F(A)}} F(A)$ *definiert wird. Auf diese Weise erhalten wir eine Kategorie* $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ *der Funktoren* $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *und der natürlichen Transformationen zwischen ihnen. Die Isomorphismen in dieser Kategorie nennen wir* natürliche Isomorphismen.

Eine natürliche Transformation α ist genau dann ein natürlicher Isomorphismus, wenn alle α_A Isomorphismen sind.

Beispiel.

- Es sei k ein Körper und $\mathcal{C} = \mathcal{D} = Vect_k$. Die Zuordnungen
  $$V \mapsto V^{**}\,, f \mapsto f^{**} \text{ für } f : V \to W \text{ linear}$$
  definieren einen kovarianten Funktor $** : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und es gibt eine natürliche Transformation $\alpha : 1_{Vect_k} \to **$ gegeben durch
  $$V \mapsto \alpha_V\,, V \xrightarrow{\alpha_V} V^{**}\,, \alpha_V(v) := \text{ Auswertung auf } v\,.$$
  Schränken wir α auf die Kategorie $fdVect_k$ der endlichdimensionalen Vektorräume ein, so ist α_V ein Isomorphismus für jedes $V \in \operatorname{ob} fdVect_k$. Daher definiert α einen Isomorphismus in der Funktorkategorie $[fdVect_k, fdVect_k]$.
- Mit $\mathcal{LC}$ bezeichnen wir die Kategorie, deren Objekte lokalkompakte Hausdorffräume und deren Morphismen von X nach Y eigentliche stetige Abbildungen von offenen Teilmengen von X nach Y sind. Die Einpunktkompaktifizierung ist ein Funktor $F : \mathcal{LC} \to KompHaus^*$ und die Entfernung des Basispunktes ein Funktor $G : KompHaus^* \to \mathcal{LC}$.

  Die Komposition $G \circ F$ ist natürlich isomorph zu $1_{\mathcal{LC}}$ und $F \circ G$ ist natürlich isomorph zu $1_{KompHaus^*}$.

2.7.12

13. Überlagerungen

Gruppen dienen der Beschreibung von Symmetrien. Die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes entspricht in vielen Fällen den Symmetrien eines gewissen „Überlagerungsraumes". In diesem Abschnitt werden einige Grundlagen der Überlagerungstheorie entwickelt.

Definition 13.1. *Es sei $p : X \to Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume und $U \subset Y$ eine Teilmenge. Wir sagen, U wird durch p* gleichmäßig überlagert*, falls es einen diskreten topologischen Raum D und einen Homöomorphismus $\phi : p^{-1}(U) \approx U \times D$ gibt, so dass mit der Standardprojektion $\pi : U \times D \to U$ auf den ersten Faktor die Abbildungen p und $\pi \circ \phi$ auf $p^{-1}(U)$ übereinstimmen, d.h. das folgende Diagramm ist kommutativ:*

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times D \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle \pi}\downarrow \\ U & \xrightarrow{=} & U \end{array}$$

Die Abbildung p ist eine Überlagerung*, falls jeder Punkt in Y eine Umgebung besitzt, die durch p gleichmäßig überlagert wird.*

Beispielsweise ist

$$\mathbb{R} \to S^1\,,\ t \mapsto e^{2\pi i t}$$

eine Überlagerung.

Ist p eine Überlagerung, so ist p ein lokaler Homöomorphismus, d.h. jeder Punkt in X besitzt eine Umgebung U, so dass $p|_U : U \to p(U)$ ein Homöomorphismus ist. Diese letzte Eigenschaft impliziert aber in der Regel nicht, dass p eine Überlagerung ist wie das Beispiel

$$(0,1) \to S^1\,, t \mapsto e^{2\pi i t}$$

zeigt.

Es sei $p : X \to Y$ eine Überlagerung und Y zusammenhängend. Ist für ein $y \in Y$ das Urbild $p^{-1}(y) \subset X$ eine endliche Teilmenge mit d Elemengen, so gilt dies für alle $y \in Y$, denn $y \mapsto \sharp(p^{-1}(y))$ (Anzahl der Elemenge des Urbildes) ist eine lokalkonstante Funktion (in dem Sinne, dass jeder Punkt in Y eine Umgebung besitzt, auf der die Funktion konstant ist), falls p eine Überlagerung ist. Wir nennen dann p eine *d-blättrige* Überlagerung. Ansonsten heißt p eine *unendliche Überlagerung.*

Die fundamentale Eigenschaft von Überlagerungen ist die folgende „eindeutige Wegeliftungseigenschaft".

Proposition 13.2. *Es sei $p : X \to Y$ eine Überlagerung und $\gamma : [0,1] \to Y$ ein Weg. Ist $x \in X$ ein Punkt mit $p(x) = \gamma(0)$, so gibt es einen eindeutig bestimmten Weg $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to X$ mit $\widetilde{\gamma}(0) = x$ und $p \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$.*

Beweis. Wir überdecken Y durch offene Teilmengen, die gleichmäßig durch p überlagert werden. Die Urbilder dieser Mengen unter γ bilden eine offene Überdeckung von $[0,1]$. Wir wählen eine Lebesguezahl λ für diese Überdeckung und $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $1/n \le \lambda$. Da dann für alle $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$ das Bild $\gamma([k/n,(k+1)/n])$ ganz in einer Teilmenge von Y liegt, die gleichmäßig überlagert wird, können wir $\widetilde{\gamma}$ induktiv definieren, wobei im k-ten Schritt $\widetilde{\gamma}$ am Punkt k/n bestimmt ist und über $[k/n,(k+1)/n]$ ausgedehnt werden muss. Dies ist eindeutig möglich, da $\gamma([k/n,(k+1)/n]) \subset Y$ gleichmäßig überlagert ist. □

Wege sind spezielle Arten von Homotopien (nämlich von Abbildungen, die auf einer einpunktigen Menge definiert sind). Das folgende Theorem ist daher eine Verallgemeinerung der eben bewiesenen Proposition.

Satz 13.3 (Homotopie-Liftungstheorem)**.** *Es sei $p : X \to Y$ eine Überlagerung und*

$$F : W \times [0,1] \to Y$$

eine Homotopie. Weiterhin sei $\tilde{f} : W \to X$ eine Liftung von $F(-,0)$, d.h. $p \circ \widetilde{f} = F(-,0)$. Dann existiert eine Homotopie

$$\widetilde{F} : W \times [0,1] \to X$$

mit $\widetilde{F}(-,0) = \widetilde{f}$ und $p \circ \widetilde{F} = F$.

Beweis. Wir definieren für alle $w \in W$ die Abbildung $\widetilde{F}$ auf $\{w\} \times [0,1]$ gemäß der vorhergehenden Proposition. Hier beachtet man, dass $\widetilde{F}(w,0) = \widetilde{f}(w) \in X$, also der Anfangspunkt des gelifteten Weges, vorgegeben ist. Diese Liftung erfüllt $p \circ \widetilde{F} = F$. Außerdem ist die Liftung $\widetilde{F}$ eindeutig (denn die Liftung von Wegen ist eindeutig). Zu zeigen bleibt die Stetigkeit der so definierten Abbildung $\widetilde{F} : W \times [0,1] \to X$.

Es sei $(w,t) \in W \times [0,1]$. Indem wir die Kompaktheit von $[0,1]$ und die Existenz einer Lebesguezahl ausnutzen, finden wir ein $n \in \mathbb{N}$, und eine Umgebung $U \subset W$ von w, so dass $F(U \times [k/n,(k+1)/n])$ für alle $0 \le k \le n-1$ in einer Teilmenge von Y liegt, die durch p gleichmäßig überlagert wird.

Wir zeigen induktiv, dass es für alle $0 \le k \le n$ eine Umgebung U_k von w gibt mit $U_k \subset U$ und $\widetilde{F}$ stetig auf $U_k \times [0,k/n]$. Für $k = n$ folgt daraus die Stetigkeit von $\widetilde{F}$ auf $U_n \times [0,1]$ und daraus die Behauptung, da $w \in W$ beliebig war und Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist.

Wir setzen $U_0 := U$. Angenommen, U_k ist bereits konstruiert. Wegen $U_k \subset U$ liegt dann $F(U_k \times [k/n, k+1/n])$ in einer Teilmenge $Z \subset Y$, die durch p gleichmäßig überdeckt wird. Sei nun D eine diskrete Menge und $\phi : p^{-1}(Z) \approx Z \times D$ wie in Definition 13.1. Es sei $d \in D$ das eindeutig bestimmte Element mit $\widetilde{F}(w,k/n) \in T \times \{d\}$. Die Teilmenge $Z \times \{d\} \subset Z \times D$ ist offen, da D ein diskreter Raum ist. Weil wir $\widetilde{F}$ auf $U_k \times \{k/n\}$ bereits als stetig nachgewiesen haben, ist somit

$$(\widetilde{F}|_{U_k\times\{k/n\}})^{-1}(Z\times\{d\})\subset U_k\times\{k/n\}$$

eine offene Teilmenge. Wir schreiben diese als $U_{k+1}\times\{k/n\}$ und erhalten so eine Umgebung $U_{k+1}\subset U_k$ von w in W.

Nach der Konstruktion von $\widetilde{F}$ (durch Liftung von Wegen) ist aber nun $\widetilde{F}$ auf $U_{k+1}\times[k/n,(k+1)/n]$ genau durch die Abbildung

$$(v,t)\mapsto(p|_{\phi^{-1}(Z\times\{d\})})^{-1}\circ F$$

gegeben und damit stetig.

Somit ist $\widetilde{F}$ auf $U_{k+1}\times[0,k/n]$ und auch auf $U_{k+1}\times[k/n,(k+1)/n]$ stetig. Da beide Mengen abgeschlossen in $U_{k+1}\times[0,(k+1)/n]$ sind, folgt die Stetigkeit von $\widetilde{F}$ auf $U_{k+1}\times[0,(k+1)/n]$. □

4.7.12

Dieses Theorem hat einige bemerkenswerte Korollare. Es sei dabei immer $p:X\to Y$ eine Überlagerung.

Korollar 13.4. *Es seien γ_0,γ_1 Wege in Y mit den gleichen Anfangs- und Endpunkten und mit $\gamma_0\simeq\gamma_1$ rel $\{0,1\}$. Es seien $\widetilde{\gamma}_0,\widetilde{\gamma}_1:[0,1]\to X$ Liftungen von γ_0 und γ_1 mit den gleichen Anfangspunkten $x_0\in X$. Dann gilt $\widetilde{\gamma}_0(1)=\widetilde{\gamma}_1(1)$ und $\widetilde{\gamma}_0\simeq\widetilde{\gamma}_1$ rel $\{0,1\}$.*

Beweis. Wir setzen $W:=[0,1]$ und fassen dies als Parameterraum für die Kurven γ_0 und γ_1 auf. Es sei $F:W\times[0,1]\to Y$ eine Homotopie rel $\{0,1\}$ von γ_0 nach γ_1 und $\widetilde{F}:W\times[0,1]\to X$ der eindeutig bestimmte Lift mit Anfangsdatum $\widetilde{F}(t,0)=\widetilde{\gamma}_0(t)$. Aus der eindeutigen Liftung von Wegen ergibt sich, dass $\widetilde{F}(0,s)=x_0$ für alle $s\in[0,1]$. Insbesondere sehen wir, dass $\widetilde{F}(-,1):W\to X$ der eindeutig bestimmte Lift von γ_1 mit Anfangspunkt x_0 sein muss, also gleich $\widetilde{\gamma}_1$ ist. Da F eine Homotopie relativ zu den Endpunkten war, muss $\widetilde{F}(1,s)\in X$ ebenfalls konstant sein (nämlich gleich dem Endpunkt des Liftes $\widetilde{\gamma}_0$). Somit ist $\widetilde{F}$ eine Homotopie rel $\{0,1\}$ von $\widetilde{\gamma}_0$ nach $\widetilde{\gamma}_1$. □

Korollar 13.5. *Es sei $\gamma:[0,1]\to Y$ ein geschlossener Weg, der homotop zu einem konstanten Weg rel $\{0,1\}$ ist. Dann ist jeder Lift $\widetilde{\gamma}:[0,1]\to X$ auch ein geschlossener Weg und homotop zu einem konstanten Weg rel $\{0,1\}$.*

Korollar 13.6. *Es sei Y ein wegzusammenhängender Raum, der eine wegzusammenhängende nichttriviale Überlagerung $p:X\to Y$ besitzt, d.h. p ist mindestens zweiblättrig. Ist $y_0\in Y$, so gilt $\pi_1(Y,y_0)\neq 1$.*

Beweis. Es seien $x_1,x_2\in X$ zwei verschiedene Punkte über y_0 und es sei $\gamma:[0,1]\to X$ ein Weg, der x_1 mit x_2 verbindet. Dann ist $p\circ\gamma$ ein geschlossener Weg in Y, der sich nicht zu einem geschlossenen Weg in X liften lässt (sonst wären alle Lifts geschlossen, aber γ ist ein nichtgeschlossener Lift). Dieser Weg in Y kann also nicht homotop zu einem konstanten Weg relativ zu den Endpunkten sein. □

Da die kanonische Projektion $S^2 \to \mathbb{R}P^2 = S^2/\sim$ eine Überlagerung ist (siehe Blatt 11), folgt aus dem letzten Korollar, dass $\mathbb{R}P^2$ nichttriviale Fundamentalgruppe hat (bzgl. eines beliebigen Basispunktes). Andererseits ist S^2 einfach zusammenhängend (siehe Proposition 11.9). Insgesamt folgt also

Korollar 13.7. *$\mathbb{R}P^2$ ist nicht homöomorph zu S^2.*

Wir berechnen nun explizit die Fundamentalgruppe des Kreises S^1. Wir betrachten dazu wieder die Exponentialabbildung

$$p : \mathbb{R} \to S^1 \, , \ t \mapsto e^{2\pi i t} \, .$$

Diese ist eine Überlagerung. Es sei $f : [0,1] \to S^1$ ein bei $1 \in S^1$ basierter geschlossener Weg. Es sei $\widetilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ die Liftung von f mit $\widetilde{f}(0) = 0$. Wir setzen

$$\deg f := \widetilde{f}(1) \in \mathbb{Z} \, .$$

Wie wir bereits bewiesen haben, hängt $\deg f$ nur von der Homotopieklasse von f relativ $\{0,1\}$ ab. Daher erhalten wir eine induzierte Abbildung

$$\deg : \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z} \, .$$

Wir zeigen:

Proposition 13.8. *Die Abbildung* deg *ist ein Gruppenisomorphismus.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass deg ein Homomorphismus ist. Seien dazu $f, g : [0,1] \to S^1$ bei 1 basierte geschlossene Wege. Es seien $\widetilde{f}, \widetilde{g} : [0,1] \to \mathbb{R}$ die Liftungen von f und von g mit Anfangspunkt $0 \in \mathbb{R}$. Wir setzen $n := \widetilde{f}(1), \ m := \widetilde{g}(1)$. Dann ist die Komposition

$$\widetilde{f} \cdot (\widetilde{g} + n) : [0,1] \to \mathbb{R}$$

der eindeutig bestimmte Lift von $f \cdot g$ mit Anfangspunkt $0 \in \mathbb{R}$. Somit haben wir

$$\deg(f \cdot g) = (\widetilde{f} \cdot (\widetilde{g} + n))(1) = m + n = \deg(f) + \deg(g) \, .$$

Die Abbildung deg ist surjektiv, denn ist $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ ein Weg mit Anfang 0 und Ende $n \in \mathbb{Z}$, so gilt $\deg([p \circ \gamma]) = n$. Die Abbildung deg ist aber auch injektiv: Angenommen $f : [0,1] \to S^1$ ist ein in 1 basierter geschlossener Weg mit $\deg f = 0$. Dann gilt $\widetilde{f}(1) = 0$, d.h. auch $\widetilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist ein geschlossener Weg. Diesen können wir in $\mathbb{R}$ relativ $\{0,1\}$ auf den konstanten Weg mit Wert $0 \in \mathbb{R}$ zusammenziehen. Komposition einer solchen Homotopie mit p zeigt, dass $[f] \in \pi_1(S^1, 1)$ das neutrale Element repräsentiert. $\square$

Es sei nun $f : S^1 \to S^1$ eine Abbildung mit $f(1) = 1$. Wir können diese als geschlossenen in 1 basierten Weg $[0,1] \to S^1$ auffassen. Wir definieren dann $\deg f \in \mathbb{Z}$ wie eben und nennen diese Zahl den *Abbildungsgrad* von f. Man sieht:

Proposition 13.9. *Die Abbildung $S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$ hat Abbildungsgrad n für alle $n \in \mathbb{Z}$.*

Die gerade konstruierte Abbildung $f : S^1 \to S^1$ induziert auch eine Abbildung $f_* : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, 1)$. Identifizieren wir $\pi_1(S^1, 1)$ mit $\mathbb{Z}$ über den gerade erhaltenen Isomorphismus, so haben wir

$$\deg f = f_*(1) \in \mathbb{Z}\,.$$

Ist $f : S^1 \to S^1$ eine beliebige stetige Abbildung (nicht unbedingt basispunkterhaltend), so induziert f immer noch eine Abbildung $f_* : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, f(1))$. Letzte Gruppe ist kanonisch isomorph zu $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$, da $\pi_1(S^1, 1)$ abelsch ist (vgl. Proposition 11.4). Wir erhalten also wieder einen wohldefinierten Abbildungsgrad $\deg f := f_*(1) \in \mathbb{Z}$. Man überzeugt sich, dass dieser nur von der Homotopieklasse von f abhängt (wobei die betrachteten Homotopien nicht basispunkterhaltend sein brauchen): Ist $H : S^1 \times [0, 1] \to S^1$ eine Homotopie, so bezeichne η den Weg $t \mapsto H(1, t)$. Man überzeugt sich wie im Beweis von Proposition 11.8, dass für jedes Element $g \in \pi_1(S^1, 1)$ gilt:

$$(H_1)_*(g) = \psi_\eta((H_0)_*(g))\,.$$

Nach Identifikation von $\pi_1(S^1, H_0(1))$ und $\pi_1(S^1, H_1(1))$ mit $\pi_1(S^1, 1)$ werden also $(H_0)_*(g)$ und $(H_1)_*(g)$ auf das gleiche Element abgebildet (hier benutzen wir wieder, dass $\pi_1(S^1, 1)$ abelsch ist). Bezeichnen wir mit $[S^1, S^1]$ die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen $S^1 \to S^1$, so erhalten wir also eine kanonische Bijektion

$$[S^1, S^1] \to \mathbb{Z}\,, [f] \mapsto \deg f\,.$$

Insbesondere trägt $[S^1, S^1]$ eine Gruppenstruktur.

Korollar 13.10 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Es sei P ein nichtkonstantes Polynom mit komplexen Koeffizienten. Dann hat P eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*

Beweis. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_n$$

mit $n > 0$. Falls P keine Nullstellen hat, können wir die Homotopie

$$S^1 \times [0, 1] \to S^1\,,\ F(z, t) := \frac{P((1-t)z/t)}{|P((1-t)z/t)} = \frac{t^n P((1-t)z/t)}{|t^n P((1-t)z/t)|}$$

betrachten. Da

$$t^n P((1-t)z/t) = (1-t)^n z^n + a_{n-1}(1-t)^{n-1}z^{n-1}t + \ldots + a_0 t^n\,,$$

ist F auch bei $t = 0$ definiert und dort stetig. Wir haben $F(z, 0) = z^n$ und $F(z, 1) = P(0)/|P(0)|$. Daher ist die Abbildung $S^1 \to S^1$, $z \to z^n$ homotop zu einer konstanten Abbildung, im Widerspruch (wegen $n > 0$) dazu, dass diese Abbildungen unterschiedlichen Abbildungsgrad haben. $\square$

9.7.12

Wir wenden uns nun einer Variante des vorhin besprochenen Liftungsproblems zu. Es sei $p : X \to Y$ eine Überlagerung, $x_0 \in X$ ein Punkt und $y_0 := p(x_0)$. Es sei W ein topologischer Raum und $f : W \to Y$ eine stetige Abbildung. Es sei $w_0 \in W$ ein Punkt mit $f(w_0) = y_0$. Existiert dann eine stetige Abbildung $\widetilde{f} : W \to X$, so dass $p \circ \widetilde{f} = f$ und $\widetilde{f}(w_0) = x_0$? Dieses Problem hat nicht in jedem Falle eine Lösung, wie man am Beispiel $p : \mathbb{R} \to S^1, t \mapsto e^{2\pi i t}$, $W = S^1$ und $f : S^1 \to S^1 = \mathrm{id}$ sieht. Der folgende Satz gibt aber eine umfassende Antwort. Wir brauchen zunächst einen neuen Begriff aus der mengentheoretischen Topologie.

Definition 13.11. *Ein topologischer Raum X heißt* lokal wegzusammenhängend*, wenn für jeden Punkt $x \in X$ und jede Umgebung $U \subset X$ von x eine wegzusammenhängende Umgebung $V \subset X$ von x existiert mit $V \subset U$.*

Satz 13.12 (Liftungstheorem)**.** *Es sei die Situation wie vor der Definition gegeben. Darüberhinaus sei W wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Dann existiert eine Lösung $\widetilde{f} : W \to X$ des Liftungsproblems genau dann, falls*

$$f_*(\pi_1(W, w_0)) \subset \mathrm{im}(p_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)) .$$

In diesem Fall ist die Liftung $\widetilde{f}$ sogar eindeutig.

Beweis. Die im Theorem beschriebene Bedingung ist notwendig für die Existenz von $\widetilde{f}$, da dann

$$f_* = p_* \circ \widetilde{f} : \pi_1(W, w_0) \to \pi_1(Y, y_0) .$$

wegen der Funktorialität von π_1. Es sei nun die angegebene Bedingung erfüllt. Wir versuchen $\widetilde{f}$ wie folgt zu konstruieren: Es sei $w \in W$ beliebig. Da W wegzusammenhängend ist, existiert ein Weg $\gamma : [0, 1] \to W$ von w_0 nach w. Wir definieren $\widetilde{f}(w)$ als den Endpunkt des Lifts $\widetilde{f \circ \gamma}$ von $f \circ \gamma$ mit Anfangspunkt x_0.

Als erstes zeigen wir, dass diese Definition nicht von der Auswahl des Weges γ abhängt. Sei also $\gamma' : [0, 1] \to W$ ein anderer Weg von w_0 nach w. Dann ist $\gamma \cdot (\gamma')^{-1}$ ein geschlossener in w_0 basierter Weg. Damit ist auch $f \circ (\gamma \cdot (\gamma')^{-1})$ ein geschlossener in y_0 basierter Weg. Nach Voraussetzung liegt er im Bild von $p_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ und lässt sich daher zu einem geschlossenen Weg in X mit Anfangspunkt x_0 liften. Dies folgt aus dem Homotopieliftungstheorem 13.3, da Lifts von relativ zu den Endpunkten homotopen Wegen wieder homotop relativ zu den Endpunkten sind. Da dieser Lift Endpunkt x_0 hat, muss er mit der Komposition $(\widetilde{f \circ \gamma}) \cdot (\widetilde{f \circ \gamma'})^{-1}$ übereinstimmen (nach der eindeutigen Wegeliftungseigenschaft). Insbesondere gilt also $\widetilde{f \circ \gamma}(1) = \widetilde{f \circ \gamma'}(1)$ und obige Definition von $\widetilde{f}$ ist unabhängig von der Wahl von γ.

Offensichtlich gilt $p \circ \widetilde{f} = f$, $g(w_0) = x_0$ und jede Lösung des Liftungsproblems muss mit dem eben definierten $\widetilde{f}$ übereinstimmen (wegen der eindeutigen Wegeliftungseigenschaft).

Es bleibt noch zu zeigen, dass das eben definierte $\widetilde{f}$ stetig ist. Sei $w \in W$ und $y := f(w)$. Wir wählen eine offene Umgebung $U \subset Y$ von y, die durch p gleichmäßig überdeckt wird, und eine wegzusammenhängende Umgebung $V \subset W$ von w mit $f(V) \subset U$. Insbesondere ist also

$$p^{-1}(f(V)) \stackrel{\phi}{\approx} f(V) \times D$$

mit einer diskreten Menge D, wobei der Homöomorphismus ϕ mit p und der Projektion $f(V) \times D \to f(V)$ verträglich ist. Wir wählen $d \in D$ so, dass $\widetilde{f}(w) \in \phi^{-1}(f(V) \times \{d\})$ und setzen

$$Z := \phi^{-1}(f(V) \times \{d\}) \subset X\,.$$

Man beachte, dass die Einschränkung

$$p|_Z : Z \to f(V) \subset Y$$

ein Homöomorphismus ist (gegeben durch die Komposition von ϕ mit der Projektion $f(V) \times \{d\} \to f(V)$).

Es sei nun γ ein fester Weg in W von w_0 nach w. Ist $w' \in V$, so können wir einen Weg von w_0 nach w' konstruieren, indem wir γ mit einem kleinen in V gelegenen Weg $\gamma_{w'}$ komponieren, der w mit w' verbindet. Nach Konstruktion von $\widetilde{f}$ gilt also

$$\widetilde{f}|_V = (p|_Z)^{-1} \circ f|_V$$

Daher ist $\widetilde{f}|_V$ stetig. □

Man kann sich an Beispielen überzeugen, dass die Voraussetzung „W lokal wegzusammenhängend“ wirklich notwendig ist.

Aus dem eben bewiesenen Satz folgt, dass das Liftungsproblem immer eindeutig lösbar ist, falls W einfach zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist.

Definition 13.13. *Es sei $p : X \to Y$ eine Überlagerung. Eine* Decktransformation *dieser Überlagerung ist ein Homöomorphismus $\phi : X \to X$ mit $p \circ \phi = p$.*

Die Decktransformationen einer Überlagerung bilden eine Gruppe mit der Komposition als Verknüpfung. Wir nennen diese Gruppe $\mathrm{Deck}(p)$.

Korollar 13.14. *Es seien $p : X \to Y$ eine Überlagerung und $x_0, x_1 \in X$ mit $p(x_0) = p(x_1)$. Falls X einfach zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist, so gibt es eine eindeutig bestimmte Decktransformation $\phi : X \to X$ mit $\phi(x_0) = x_1$.*

Beweis. Nach dem Liftungstheorem existiert ein (stetiger) Lift von $\phi : X \to X$ von $p : X \to Y$ mit $\phi(x_0) = x_1$. Entsprechend gibt es einen stetigen Lift $\psi : X \to X$ von $p : X \to Y$ mit $\psi(x_1) = x_0$. Daher ist $\psi \circ \phi$ der eindeutige

Lift $X \to X$ von $p : X \to Y$, der x_0 auf x_0 schickt. Er muss also (nach Eindeutigkeit der Lösung des Liftungsproblems) mit id_X übereinstimmen. Entsprechend folgt $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_X$. Die Abbildung ϕ ist also in der Tat ein Homöomorphismus. □

Definition 13.15. *Eine Überlagerung $p : X \to Y$ heißt* universell*, falls p surjektiv, X einfach zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist.*

Direkt aus dem Liftungstheorem ergibt sich:

Proposition 13.16. *Es seien $p : X \to Y$ und $p' : X' \to Y$ universelle Überlagerungen. Dann gibt es einen Homöomorphismus $\phi : X \to X'$ mit $p' \circ \phi = p$.*

(Man sollte sich klarmachen, warum in der Proposition die Surjektivität von p und von p' benötigt werden).

Dieser Homöomorphismus ϕ ist natürlich nicht eindeutig bestimmt: Für alle $x \in X$ und $x' \in X'$ mit $p(x) = p'(x')$ existiert ein Homöomorphismus ϕ der eben genannten Art mit $\phi(x) = x'$.

Das letzte Korollar erlaubt eine interessante Folgerung. Es sei wieder $p : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ eine universelle Wir erhalten eine Abbildung

$$\pi_1(Y, y_0) \to \mathrm{Deck}(p)$$

wie folgt: Wir betrachten ein Element $[\gamma] \in \pi_1(Y, y_0)$ mit Repräsentant $\gamma : [0,1] \to Y$. Der Endpunkt des Lifts $\widetilde{\gamma}$ von γ mit Anfangspunkt x_0 ist ein Punkt $x_1 \in X$ mit $p(x_1) = y_0$. Weiterhin ist x_1 unabhängig von der Auswahl des Repräsentanten γ nach dem Homotopieliftungstheorem. Nach dem Korollar 13.14 gibt es eine eindeutige Decktransformation $\psi_g \in \mathrm{Deck}(p)$ mit $\psi_g(x_0) = \tilde{\gamma}(1)$. Wir erhalten auf diese Weise eine wohldefinierte Abbildung

$$\Psi : \pi_1(Y, y_0) \to \mathrm{Deck}(p)\,,\ g \mapsto \Psi_g\,.$$

11.7.12

Diese ist ein Gruppenhomomorphismus: Seien $g, g' \in \pi_1(Y, y_0)$ mit Repräsentanten $\gamma, \gamma' : [0,1] \to Y$. Es seien $\widetilde{\gamma}, \widetilde{\gamma}' : [0,1] \to X$ die Lifts von γ und γ' mit Anfangspunkt x_0. Die Komposition $\Psi_g \circ \widetilde{\gamma}' : [0,1] \to X$ ist dann der Lift von γ' mit Anfangspunkt $\Psi_g(x_0) = \widetilde{\gamma}(1)$. Somit ist der komponierte Weg $\widetilde{\gamma} \cdot (\Psi_g \circ \widetilde{\gamma}')$ (Erinnerung: Erst $\widetilde{\gamma}$, dann $\Psi_g \circ \widetilde{\gamma}'$) der Lift von $\gamma \cdot \gamma'$ mit Anfangspunkt x_0. Der Endpunkt dieses gelifteten Weges ist also der Punkt $(\Psi_g \circ \widetilde{\gamma}')(1) = \Psi_g(\widetilde{\gamma}'(1)) = \Psi_g(\Psi_{g'}(x_0)) = (\Psi_g \circ \Psi_{g'})(x_0)$. Andererseits stimmt dieser Endpunkt nach Definition von Ψ mit $\Psi_{g \cdot g'}(x_0)$ überein. Es gilt also nach der Eindeutigkeit von Liftungen:

$$\Psi_{g \cdot g'} = \Psi_g \circ \Psi_{g'} : X \to X\,.$$

Es ist leicht zu sehen, dass Ψ das neutrale Element in $\pi_1(Y, y_0)$ (repräsentiert durch den konstanten Weg in y_0) nach id_X schickt. Somit ist Ψ ein Gruppenhomomorphismus.

Die Abbildung Ψ ist surjektiv: Sei $\phi \in \mathrm{Deck}(p)$. Man wähle einen Weg $\gamma : [0,1] \to X$ von x_0 nach $\phi(x_0)$. Nach Konstruktion von Ψ gilt dann $\Psi_{[p\circ\gamma]} = \phi$.

Zur Injektivität: Sei $[\gamma] \in \pi_1(Y, y_0)$ mit $\Psi_{[\gamma]} = \mathrm{id}_X$. Dies heißt, dass der Lift von γ mit Anfangspunkt x_0 auch bei x_0 endet. Da X einfach zusammenhängend ist, können wir diese Schleife in X relativ zu den Endpunkten auf einen konstanten Weg homotopieren. Komponieren wir diese Homotopie mit p, so folgt, dass γ ebenfalls homotop zu einem konstanten Weg relativ zu den Endpunkten ist.

Insgesamt folgt also

Proposition 13.17. *Die eben definierte Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \pi_1(Y, y_0) & \to & \mathrm{Deck}(p) \\ g & \mapsto & \Psi_g \end{array}$$

ist ein Gruppenisomorphismus.

Wir bemerken, dass die Abbildung $\Psi : \pi_1(Y, y_0) \to \mathrm{Deck}(p)$ im allgemeinen von der Auswahl des Punktes $x_0 \in X$ mit $p(x_0) = y_0$ abhängt.

Wir haben nun einen wichtigen Zusammenhang erkannt: Falls $X \to Y$ eine universelle Überlagerung ist , so können wir die Fundamentalgruppe von Y mit den Symmetrien (d.h. den Decktransformationen) von p identifizieren.

Proposition 13.18. *Es sei $p : X \to Y$ eine Überlagerung, es sei X wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend und G sei eine Gruppe bestehend aus Decktransformationen von X, die die folgende Eigenschaft hat: Für alle $y \in Y$ und $x_0, x_1 \in p^{-1}(y)$ existiert ein $g \in G$ mit $g(x_0) = x_1$. (Man sagt auch: G* operiert transitiv *auf $p^{-1}(y)$). Dann gilt $G = \mathrm{Deck}(p)$.*

Beweis. Sei $\phi \in \mathrm{Deck}(p)$. Nach Voraussetzung gibt es ein $g \in G$ mit $g(x_0) = \phi(x_0)$. Da g und ϕ Decktransformationen sind, folgt daraus $g = \phi$. □

Wählt man $p : X \to Y$ als eine universelle Überlagerung, so ergibt sich im Zusammenspiel mit der Tatsache $\mathrm{Deck}(p) \cong \pi_1(Y, y_0)$ eine effektive Methode zur Bestimmung der Fundamentalgruppe von Y.

Wir führen noch eine bequeme Sprechweise ein. Es sei X ein topologischer Raum und

$$\phi : G \to \mathrm{Homöo}(X)$$

ein Gruppenhomomorphismus von einer Gruppe G in die Gruppe der Homöomorphismen von X. Wir sprechen dann auch von einer *Wirkung* oder *Operation* der Gruppe G auf X. Ist $g \in G$, so bezeichnen wir den Homöomorphismus $\phi(g) : X \to X$ oft mit ϕ_g oder nur mit g. Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf X durch

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G \text{ mit } g(x) = y\,.$$

und setzen

$$X/G := X/\sim$$

(mit der Quotiententopologie). Dies ist der *Orbitraum* der gegebenen Gruppenwirkung von G auf X.

Beispiel. Die Gruppe $\mathbb{Z}/2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ operiert auf S^2 durch $\phi_{\overline{0}} = \mathrm{id}$ (das ist klar, weil $\phi : G \to \mathrm{Homöo}(X)$ das neutrale Element auf das neutrale Element abbilden muss) und $\phi_{\overline{1}}(x) := -x$. Der Orbitraum dieser Operation ist der reell-projektive Raum $\mathbb{R}P^2$.

Definition 13.19. *Es sei $\phi : G \to \mathrm{Homöo}(X)$ eine Gruppenwirkung auf dem topologischen Raum X. Wir nennen diese Wirkung* eigentlich diskontinuierlich*, falls jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, so dass $\phi_g(U) \cap U \neq \emptyset \Rightarrow g = e$, wobei $e \in G$ das neutrale Element bezeichnet.*

Proposition 13.20. *Es sei eine eigentlich diskontinuierliche Wirkung einer Gruppe G auf dem zusammenhängenden und lokal wegzusammenhängenden Raum X gegeben. Dann ist die kanonische Projektion*

$$p : X \to X/G$$

eine Überlagerung mit Decktransformationsgruppe G.

Beweis. Aus der Tatsache, dass G eigentlich diskontinuierlich wirkt, folgt, dass p eine Überlagerung ist: Sei $y \in X/G$ und $x \in p^{-1}(y)$. Wir wählen eine offene Umgebung $U \subset X$ von x, so dass $\phi_g(U) \cap U = \emptyset$ für alle $g \neq e$. Dann ist $p(U) \subset Y$ eine offene Umgebung von y, die durch p gleichmäßig überlagert wird (mit diskreter Menge $D := G$).

Offensichtlich ist $G < \mathrm{Deck}(p)$ und G wirkt transitiv auf den Fasern von p. Nach Proposition 13.18 gilt somit $G = \mathrm{Deck}(p)$. $\square$

Zusammenfassend folgt also:

Satz 13.21. *Es sei X ein einfach zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum. Die Gruppe G wirke eigentlich diskontinuierlich auf X. Dann gilt für jeden Basispunkt $y_0 \in Y := X/G$*

$$\pi_1(Y, y_0) \cong G\,.$$

Beispiel.

- $\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0) \cong \mathbb{Z}/2$.
- Die Fundamentalgruppe der Kleinschen Flasche K ist isomorph zu einem semidirekten Produkt $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ (siehe Blatt 13, Aufgabe 4). Diese Fundamentalgruppe ist nicht abelsch.

16.7.12

Wir beenden unsere Diskussion der Überlagerungen mit einem Resultat um die Existenz der universelle Überlagerungen. Wir brauche eine Definition:

Definition 13.22. *Ein topologischer Raum X heißt semilokal einfach zusammenhängend, falls für jedes $x \in X$ eine Umgebung U um x existiert, sodass*
$$i_* : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$$
trivial ist, wobei $i : U \hookrightarrow X$ die Inklusion ist.

Beispiel. Alle Simplizialkomplexe und Mannigfaltigkeiten sind semilokal einfach zusammenhängend. Der Raum
$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \partial B_{1/n}(0, 1/n) \right) \subset \mathbb{R}^2 ,$$
genannt *Hawaiianische Ohrringe*, ist nicht semilokal einfach zusammenhängend.

Das folgende Resultat besagt, dass sehr viele Räume eine universelle Überlagerung besitzen.

Satz 13.23. *Sei Y wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Dann sind äquivalent:*
(1) *Y besitzt eine universelle Überlagerung.*
(2) *Y ist semilokal einfach zusammenhängend.*

Ohne Beweis (vgl. Literatur).

14. Der Jordansche Kurvensatz.

Als Anwendung unserer Konzepte beweisen in diesem Abschnitt das folgende fundamentale Resultat der geometrischen Topologie.

Satz 14.1 (Allgemeiner Jordanscher Kurvensatz in der Ebene, formuliert 1887 von C. Jordan und bewiesen 1905 von O. Veblen)**.** *Sei $C \subset \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge, die homöomorph zu S^1 ist. (Anderes gesagt: C ist das Bild einer stetigen injektiven Abbildung $S^1 \to \mathbb{R}^2$). Dann gelten die folgenden Aussagen:*
- *Das Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus C$ besteht aus genau 2 Komponenten W_1 und W_2.*
- *Genau eine davon ist beschränkt („Inneres von C“) und eine unbeschränkt („Äußeres von C“).*
- *$\partial W_1 = \partial W_2 = C$.*

Trotz der anschaulichen Aussage ist der Beweis dieses Satzes schwierig. Insbesondere geht an einigen Stellen die Theorie der Fundamentalgruppe und der Überlagerungen ein. Der Beweis wird einfacher, wenn man annimmt, dass $C \subset \mathbb{R}^2$ eine glatte eingebettete Untermannigfaltigkeit ist. Dies soll hier aber nicht weiter diskutiert werden.

Zunächst machen wir uns nochmals Gedanken über die Bedeutung des Wortes „Komponente“.

Lemma 14.2. *Sei X lokal wegzusammenhängend. Dann stimmen die Komponenten von X mit Wegekomponenten überein und diese sind jeweils offene Teilmengen von X.*

Beweis. Übung 2 Blatt 12 sagt, dass jede Wegekomponente $W \subset X$ offen ist, falls X lokal wegzusammenhängend ist. Wir wissen auch, dass es für jede Wegekomponente W eine Komponente K mit $W \subset K$ gibt. Wir müssen noch zeigen, dass wir für jede Komponente K eine Wegekomponente W mit $K \subset W$ finden.

Sei $(W_\alpha)_{\alpha \in A}$ die Familie der Wegekomponenten von X. Nehmen wir an, dass zwei verschiedene Wegekomponenten W_{α_1} und W_{α_2} mit

$$K \cap W_{\alpha_1} \neq \emptyset$$

und

$$K \cap W_{\alpha_2} \neq \emptyset$$

existieren. Dann ist

$$K = \bigcup_{\alpha \in A} (W_\alpha \cap K)$$

eine nicht triviale disjunkte offene Zerlegung von K, was nicht möglich ist, da K zusammenhängend ist. □

Da in der Situation des Jordanschen Kurvensatzes die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus C \subset \mathbb{R}^2$ offen und somit lokal wegzusammenhänge ist, können wir bei der Diskussion des Jordanschen Kurvensatzes genau so gut mit Wegekomponenten statt mit Komponenten arbeiten.

Wir ersetzen nun die Ebene $\mathbb{R}^2$ durch die Einpunktkompaktifizierung $(\mathbb{R}^2)^+ = S^2$.

Lemma 14.3. *Seien $C \subset S^2$ kompakt und $b \in S^2 \setminus C$. Sei*

$$h : S^2 \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^2$$

ein Homöomorphismus. Sei $(W_\alpha)_{\alpha \in A}$ die Familie der Wegekomponenten von $S^2 \setminus C$. Dann ist

$$(h(W_\alpha \setminus \{b\}))_{\alpha \in A}$$

die Familie der Wegekomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus h(C)$. Außerdem gilt:

$$h(W_\alpha \setminus \{b\}) \subset \mathbb{R}^2 \text{ ist unbeschränkt } \Leftrightarrow b \in W_\alpha.$$

Beweis. Behauptung : Sei $W \subset (S^2 \setminus C)$ eine Wegekomponente. Dann ist $W \setminus \{b\}$ immer noch wegzusammenhängend.

Beweis : Wenn $b \notin W$, ist die Behauptung klar. Nehmen wir an, dass $b \in W$. Seien

$$x_1, x_2 \in W \setminus \{b\}$$

und

$$\gamma : I \to W$$

ein Weg von x_1 nach x_2. Wenn $b \notin \gamma(I)$, ist γ einen Weg in $W \setminus \{b\}$ von x_1 nach x_2. Nehmen wir an, dass $b \in \gamma(I)$. Sei $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(b) \subset W$. Ein solches ϵ existiert, weil W offen ist (vgl. Lemma 14.2). Seien

$$t_m := \min \{t \in I | \ \gamma(t) = p\}$$

und

$$t_M := \max \{t \in I | \ \gamma(t) = p\} .$$

Die Punkte t_m und t_M exsitieren, weil $\gamma^{-1}(p)$ abgeschlossen ist. Dann existieren

$$0 \leq t_1 < t_m$$

und

$$t_M < t_2 \leq 1$$

mit

$$\gamma(t_1), \gamma(t_2) \in B_\epsilon(b) \setminus \{b\} .$$

Der Punkt x_1 ist durch $\gamma|_{[0,t_1]}$ in $W \setminus \{b\}$ mit $\gamma(t_1)$ verbunden. Der Punkt $\gamma(t_1)$ ist durch einen Weg μ in $B_\epsilon(b) \setminus \{b\}$ mit $\gamma(t_2)$ verbunden. Der Punkt $\gamma(t_2)$ ist durch $\gamma|_{[t_2,1]}$ in $W \setminus \{b\}$ mit x_2 verbunden. Insgesamt ist x_1 durch

$$\gamma|_{[0,t_1]} \cdot \mu \cdot \gamma|_{[t_2,1]}$$

in $W \setminus \{b\}$ mit x_2 verbunden.

Zum Beweis des Lemmas. Die Behauptung sagt, dass

$$(W_\alpha \setminus \{b\})_{\alpha \in A}$$

die Familie der Wegekomponenten von $S^2 \setminus (C \cup \{b\})$ ist. Da h ein Homöomorphismus ist, ist

$$(h(W_\alpha \setminus \{b\}))_{\alpha \in A}$$

die Familie der Wegekomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus h(C)$. Die letzte Aussage folgt aus: Sei $U \subset S^2$ eine offene Umgebung von b. Dann ist

$$h(S^2 \setminus U) \subset \mathbb{R}^2$$

kompakt, somit beschränkt. □

Auf Grund dieser Aussage genügt es, die folgende Aussage zu zeigen:

Satz 14.4. *(Der Jordansche Kurvensatz - Reformulierung) Sei $C \subset S^2$ eine Teilmenge, die homöomorph zu S^1 ist. (Anderes gesagt ist C das Bild einer stetigen injektiven Abbildung $\phi : S^1 \to S^2$). Dann gilt: Das Komplement $S^2 \setminus C$ besteht aus genau zwei Komponenten W_1 und W_2. Außerdem*

$$\partial W_1 = \partial W_2 = C.$$

Wir teilen der Reformulierung des Jordansche Kurvensatz in drei Sätze (A,B und C).

Satz 14.5. *(A) Gegeben die Voraussetzungen des Satzes 14.4 gilt: Der Raum $S^2 \setminus C$ hat mindestens zwei Komponenten.*

Wir machen uns zunächst klar, dass $S^2 \setminus C$ nicht leer ist. Falls doch, wäre $\phi : S^1 \to S^2$ ein Homöomorphismus. Entfernen wir aus S^1 zwei Punkte, erhalten wir einen Raum, der in zwei Wegekomponenten zerfällt. Entfernen wir aber aus S^2 zwei Punkte, so ist der resultierende Raum immer noch wegzusammenhängend. Somit kann $S^1 \approx S^2$ nicht gelten. Für den Beweis von Theorem 14.5 ist also nur noch die Annahme zum Widerspruch zu führen, dass das (nichtleere) Komplement $S^2 \setminus C$ wegzusammenhängend ist.

Dafür brauchen wir zwei Lemmata.

Lemma 14.6. *Sei X ein topologischer Raum. Seien $U_1, U_2 \subset X$ offene Teilmengen mit $U_1 \cup U_2 = X$ und $U_1 \cap U_2$ nicht leer und wegzusammenhängend. Seien $x \in U_1 \cap U_2$ und*

$$i_j : U_j \hookrightarrow X$$

die Inklusionen. Falls die Gruppenhomomorphismen

$$(i_j)_* : \pi_1(U_j, x) \to \pi_1(X, x)$$

für $j = 1, 2$ trivial sind (d.h. jedes Element auf das neutrale Element abbilden), dann gilt $\pi_1(X, x) = 1$. (Hier ist $1 = \{e\}$ die Gruppe mit genau einem Element).

Beweis. Sei

$$\gamma : I \to X$$

eine Schleife an x. Ähnlich wie im Beweis 11.9 existieren geschlossene Wege

$$\gamma_1, ..., \gamma_k : I \to X$$

an x, sodass jedes γ_i ganz in U_1 oder ganz in U_2 verläuft und

$$\gamma \simeq \gamma_1 \cdot ... \cdot \gamma_k \ \text{ rel } \ \{0, 1\}.$$

Nach Voraussetzung ist jedes γ_i in X homotop zur konstanten Abbildung c_x. (Hier ist jede Homotopie relativ zu $\{0, 1\}$). Also

$$\gamma_1 \cdot ... \cdot \gamma_k \simeq c_x \ \text{ rel } \ \{0, 1\}.$$

□

Lemma 14.7. *Unter den Voraussetzungen des Satzes 14.4 gilt: Sei S^1_+ (bzw. S^1_-) der obere (bzw. untere) Halbkreis in S^1. Wir setzen*

$$A_1 := \phi(S^1_+) \subset S^2 \ \textit{ und } \ A_2 := \phi(S^1_-) \subset S^2$$

und

$$U_1 := S^2 \setminus A_1 \ \textit{ und } \ U_2 := S^2 \setminus A_2.$$

Dann ist

$$(i_j)_* : \pi_1(U_j, x) \to \pi_1(X, x)$$

trivial für $j = 1, 2$.

Beweis. Sei
$$\gamma : I \to S^2 \setminus A_1$$
eine Schleife. Wir möchten zeigen, dass γ in $X = S^2 \setminus (U_1 \cap U_2)$ relativ zu $\{0,1\}$ homotop zur konstanten Abbildung k_x ist. Wir beobachten, dass $X = S^2 \setminus \{p,q\}$, wobei $\{p,q\} = \phi(A_1 \cap A_2)$. Wir betrachten wieder einen Homöomorphismus $h : S^2 \setminus \{p\} \approx \mathbb{R}^2$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $h(q) = 0 \in \mathbb{R}^2$. Es bleibt also zu zeigen, dass $h \circ \gamma$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ relativ zu $\{0,1\}$ homotop zur konstanten Abbildung $k_{h(x)}$ ist. Bemerke, dass es reicht, eine Homotopie H zwischen $h \circ \gamma$ und $k_{h(x)}$ zu finden, die nur die Bedingung $H(0,t) = H(1,t)$ erfüllt, also durch geschlossene Wege läuft. Es ist jedoch nicht erforderlich, dass die Basispunkte dieser Wege während der Homotopie unbewegt bleiben (vgl. den Beweis von Proposition 11.8).

Um eine solche Homotopie H zu definieren, wählen wir $\epsilon > 0$ mit
$$\mathrm{Im}(h \circ \gamma) \subset B_\epsilon(0).$$
Wir wählen auch
$$p \in h(A_1) \setminus B_\epsilon(0) \subset \mathbb{R}^2.$$
Sei nun α eine Kurve von 0 nach p. Dann setzen wir
$$\begin{aligned} K_1 : I \times I &\to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ (s,t) &\mapsto h(\gamma(t)) - \alpha(s), \end{aligned}$$
was eine Homotopie (mit Parameter s) von $h \circ \gamma$ nach $h \circ \gamma - p$ ist. Wir setzen nun
$$\begin{aligned} K_2 : I \times I &\to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ (s,t) &\mapsto (1-s)(h(\gamma(t))) - p, \end{aligned}$$
was eine Homotopie (mit Parameter s) von $h \circ \gamma - p$ zu einer konstanten Abbildung ist. Die Verknüpfung dieser zwei Homototopien ist die gewünschte Homotopie H. □

Zum Beweis von Satz (A) (vgl. 14.5):

Beweis. Sei S^1_+ (bzw. S^1_-) der obere (bzw. untere) Halbkreis. Wir setzen
$$A_1 := \phi(S^1_+) \text{ und } A_2 := \phi(S^1_-)$$
und
$$U_1 := S^2 \setminus A_1 \text{ und } U_2 := S^2 \setminus A_2.$$
Dann gilt
$$U_1 \cup U_2 = S^2 \setminus \phi(\{(1,0);(-1,0)\}) \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$
Außerdem
$$U_1 \cap U_2 = S^2 \setminus C.$$

Wäre $S^2 \setminus C$ wegzusammenhängend, würde $\pi_1(U_1 \cup U_2, x)$ trivial sein (vgl. Lemma 14.6 und 14.7). Jedoch gilt

$$\pi_1(U_1 \cup U_2, x) = \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \cong \mathbb{Z}\,,$$

ein Widerspruch. □

18.7.12

Wir kommen zum zweiten Schritt des Beweises von Theorem 14.4.

Satz 14.8. *(B) Der Raum $S^2 \setminus C$ hat höchstens zwei Wegekomponenten.*

Für den Beweis dieses Satzes brauchen wir zwei Propositionen.

Proposition 14.9. *Sei X ein topologischer Raum. Seien $U, V \subset X$ zwei offene Teilmengen mit $X = U \cup V$. Sei $U \cap V = A \dot\cup B$, wobei $A, B \subset U \cap V$ offen und disjunkt sind. Sei $a, a' \in A$ und $b \in B$. Dann:*

(1) *Seien $\alpha : I \to U$ ein Weg von a nach b und $\beta : I \to V$ ein Weg von b nach a. Dann hat das Element*
$$f := [\alpha \cdot \beta] \in \pi_1(X, a)$$
unendliche Ordnung.

(2) *Seien $\gamma : I \to U$ ein Weg von a nach a' und $\delta : I \to V$ ein Weg von a' nach a. Wir setzen*
$$g := [\gamma \cdot \delta] \in \pi_1(X, a).$$
Dann
$$g^k \neq f^l$$
für alle l, k mit $l, k \neq 0$.

Beweis. Wir studieren die Eigenschaften von f und g durch die folgende Überlagerung: Sei

$$Y := \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} ((U \times \{2n\}) \cup (V \times \{2n+1\})) \right) \subset X \times \mathbb{Z}.$$

Wir setzen die Relationen

$$(x, 2n) \sim (x, 2n+1), \text{ falls } x \in A,$$

und

$$(x, 2n) \sim (x, 2n-1), \text{ falls } x \in B,$$

zu einer Äquivalenzrelation auf Y fort. Es ist nicht schwer zu beweisen, dass die Projektion auf die erste Koordinate $Pr : (Y/\sim) \to X$ eine Überlagerung ist. Zusammen mit Korollar 13.4 folgt die Behauptung der Proposition:

(1) Die Aussage folgt aus der Tatsache, dass jede Liftung von f^k keine Schleife (d.h. nicht geschlossen) in $Y/\sim$ ist, falls $k \neq 0$.
(2) Die Aussage folgt aus der Tatsache, dass für alle $l \in \mathbb{Z}$ die Liftung von g^l eine Schleife in $(Y/\sim)$ ist.

□

Definition 14.10. *Ein Bogen A in einem Raum X ist eine Teilmenge $A \subset X$, die homöomorph zu $[0,1]$ ist*

Proposition 14.11. *Sei $A \subset S^2$ ein Bogen. Dann ist $S^2 \setminus A$ wegzusammenhängend.*

Der folgende trickreiche Beweis zeigt, wie schwer solche „offensichtlichen“ Aussagen manchmal zu zeigen sind.

Beweis. Behauptung : Sei $A = A_1 \cup A_2$, wobei A_1, A_2 Bögen mit $A_1 \cap A_2 = \{d\}$ sind. Falls $S^2 \setminus A_1$ und $S^2 \setminus A_2$ wegzusammenhängend sind, dann ist $S^2 \setminus A$ auch wegzusammenhängend.

Beweis : Seien $a, b \in S^2 \setminus A$. Wir nehmen an, dass a und b in verschiedene Wegekomponenten von $S^2 \setminus A$ liegen. Sei W_1 die Wegekomponente von a und sei W_2 die Vereinigung der anderen Wegekomponenten. Wir setzen $U := S^2 \setminus A_1$ und $V := S^2 \setminus A_2$, sodass

$$U \cap V = S^2 \setminus A = W_1 \dot{\cup} W_2.$$

Wegen der Voraussetzung der Behauptung gibt es Wege $\alpha : I \to U$ von a nach b und $\beta : I \to V$ von b nach a. Kraft des Punktes (1) der Proposition 14.9 hat das Element

$$[\alpha \cdot \beta] \in \pi_1(U \cup V, a)$$

unendliche Ordnung, was einen Widerspruch zu

$$\pi_1(U \cup V, a) = \pi_1(S^2 \setminus \{d\}, a) = 1$$

ist.

Zum Beweis der Proposition. Sei $\phi : I \to A$ ein Homöomorphismus. Wir nehmen an, dass es zwei Punkte $a, b \in S^2 \setminus A$ gibt, die sich nicht durch einen Weg verbinden lassen. Nach obiger Behauptung lassen sich a, b entweder in $S^2 \setminus \phi([0,1/2])$ oder in $S^2 \setminus \phi([1/2,1])$ nicht durch einen Weg verbinden. Induktiv existieren abgeschlossene intervalle $I_k \subset I$ mit Länge $|I_k| = 1/2^k$, so dass sich a und b in

$$S^2 \setminus \phi(I_k)$$

nicht durch einen Weg verbinden lassen. Allerdings gilt

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k = \{t_0\}$$

mit einem geeigneten $t_0 \in [0,1]$und

$$S^2 \setminus \{\phi(t_0)\} \cong \mathbb{R}^2$$

ist wegzusammenhängend. Damit gibt es einen Weg γ in $S^2 \setminus \{\phi(t_0)\}$, der a und b verbindet. Da $\mathrm{Im}(\gamma) \subset S^2$ kompakt ist, existiert dann auch ein $k > 0$ mit

$$\mathrm{Im}(\gamma) \cap \phi(I_k) = \emptyset,$$

was einen Widerspruch zur Eigenschaft von I_k ist. $\square$

Zum Beweis von Theorem (B) (vgl. 14.8).

Beweis. Wir möchten zeigen, dass $S^2 \setminus C$ höchstens zwei Wegekomponenten besitzt. Wir nehmen also an, dass

$$S^2 \setminus C = W_1 \dot\cup W_2 \dot\cup W_3 ,$$

wobei alle W_i nichtleere Vereinigungen von Wegekomponenten sind. Insbesondere sind alle W_i offen (vgl. Lemma 14.2). Sei $\phi : S^1 \to C$ ein Homöomorphismus. Sei S^1_+ (bzw. S^1_-) der obere (bzw. untere) Halbkreis in S^1. Wir setzen

$$A_1 := \phi(S^1_+) \text{ und } A_2 := \phi(S^1_-)$$

und

$$U := S^2 \setminus A_1 \text{ und } V := S^2 \setminus A_2.$$

Wir wissen dank Proposition 14.11), dass U und V Wegzusammenhängend sind. Wir setzen

$$X := U \cup V = S^2 \setminus \{a, b\} \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} .$$

Bemerke, dass

$$U \cap V = S^2 \setminus C = W_1 \dot\cup W_2 \dot\cup W_3.$$

Nun wählen wir $a \in W_1$, $a' \in W_2$ und $b \in W_3$. Wir verbinden a und b (bzw. a und a') in U durch α (bzw. γ). Wir verbinden auch b und a (bzw. a' und a) in V durch β (bzw. δ). Dann sagt Punkt (1) aus Proposition 14.9 (mit $A := W_1$, $B := W_2 \cup W_3$), dass sowohl $[\alpha \cdot \beta]$ als auch $[\gamma \cdot \delta]$ unendliche Ordnung in $\pi_1(X) \cong \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ haben, also insbesondere von 0 verschieden sind. Nach Teil (2) von Proposition 14.9 (diesmal mit $A := W_1 \cup W_2$, $B := W_3$) haben wir andererseits

$$[\alpha \cdot \beta]^k \neq [\gamma \cdot \delta]^l$$

in $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$ für alle $k, l \neq 0$. Das ist aber nicht möglich, denn in $\mathbb{Z}$ haben je zwei von 0 verschiedene Elemente immer ein gemeinsames Vielfaches.

Der Beweis von Theorem (B) ist damit abgeschlossen. □

Satz 14.12. *(C) Mit den Voraussetzungen des Jordanschen Theorems gilt*

$$\partial W_1 = \partial W_2 = C,$$

wobei W_1 und W_2 die Komponenten von $S^2 \setminus C$ sind.

Beweis. W_1 ist offen in $S^2 \setminus C$. Außerdem ist $S^2 \setminus C$ offen in S^2, damit ist W_1 offen in S^2. Es folgt, dass

$$\overline{W}_1 \subset (S^2 \setminus W_2) = (W_1 \cup C)$$

und dass

$$\partial W_1 = \overline{W}_1 \setminus W_1 \subset ((W_1 \cup C) \setminus W_1) = C.$$

Ähnlich $\partial W_2 \subset C$.

Es bleibt noch zeigen, dass $C \subset (\overline{W}_i \setminus W_i)$ für $i = 1, 2$. Sei dazu $x \in C$. Wir haben zu zeigen, dass für alle Umgebungen $U \subset S^2$ von x die Aussage

$$U \cap (\overline{W_i} \setminus W_i) \neq \emptyset$$

gilt.

Es genügt, diese Aussage für W_1 zu zeigen (den Fall W_2 behandelt man analog). Wir wählen dazu $a \in W_1$ und $b \in W_2$. Wir schreiben $C = C_1 \cup C_2$, wobei C_1 und C_2 Bögen in S^2 sind, wobei $C_1 \subset U$ und

$$C_1 \cap C_2 = \{p, q\}\,.$$

Sei γ ein Weg in $S^2 \setminus C_2$ von a nach b (vgl. Proposition 14.11). Es gilt

$$\mathrm{Im}(\gamma) \cap (\overline{W_1} \setminus W_1) \neq \emptyset,$$

denn sonst hätten wir

$$\mathrm{Im}(\gamma) \subset (W_1 \dot\cup W_2),$$

mit W_1 und W_2 offen und $\mathrm{Im}(\gamma) \cap W_1 \neq \emptyset$ und $\mathrm{Im}(\gamma) \cap W_2 \neq \emptyset$. Das widerspricht aber der Tatsache, dass $\mathrm{Im}(\gamma)$ zusammenhängend ist.

Somit existiert ein

$$y \in \mathrm{Im}(\gamma) \cap (\overline{W_1} \setminus W_1).$$

Da γ einen Weg in $S^2 \setminus C_2$ ist, muss y in C_1 liegen (wir wissen ja schon, dass $\overline{W_1} \setminus W_1 \subset C = C_1 \cup C_2$), was in U enthalten ist. Deswegen liegt y in $U \cap (\overline{W_1} \setminus W_1)$ und $U \cap (\overline{W_1} \setminus W_1) \neq \emptyset$, wie gewünscht. $\square$

Der Beweis des Jordanschen Kurvensatzes ist damit abgeschlossen.