H18-T3-A4

Zur Erinnerung: eine komplexe Zahl heißt *algebraisch*, wenn sie Nullstelle eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten ist.

a) Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und sei $c \in \mathbb{C}^n$ ein nicht verschwindender Vektor aus komplexen Zahlen. Zeigen Sie, dass eine komplexe Zahl z algebraisch ist, wenn eine rationale $n \times n$-Matrix A mit

$$z \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

existiert.
(Hinweis: Betrachten Sie das charakteristische Polynom von A)

b) Seien x und y zwei algebraische Zahlen. Benutzen Sie die Aussage aus dem ersten Aufgabenteil, um zu zeigen, dass $z = x + y$ ebenfalls algebraisch ist. (Hinweis: Betrachten Sie einen Vektor c, dessen Einträge von der Form $x^i y^j$ sind)

Lösungsvorschlag. Zu a). Nach Voraussetzung ist $c \neq 0$ Eigenvektor von A zum Eigenwert z. Sei $\chi_A(X) = \det(A - XE_n)$ das charakteristische Polynom von A, dann ist $\chi_A(X) \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$ wegen $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{Q})$ und $\deg(\chi_A) = n$ und es gilt außerdem $\chi_A(z) = 0$, da die Eigenwerte die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind. Nach Definition ist z also algebraisch.
Zu b). Die Idee für die Aufgabe liefert die folgende Beobachtung. Sei $z \in \mathbb{C}$ ein über $\mathbb{Q}$ algebraisches Element und $f(X) := X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{Q}[X]$ das Minimalpolynom von z. Wir betrachten den Vektor

$$c_z := \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ \vdots \\ z^{n-1} \end{pmatrix},$$

dann liefert

$$z \cdot (c_z)_i = z \cdot z^i = \begin{cases} z^{i+1} & \text{falls } i < n-1 \\ -a_0 - a_1 z - \ldots - a_{n-1} z^{n-1} & \text{falls } i = n-1 \end{cases}$$

n lineare Gleichungen in den z^i mit rationalen Koeffizienten, was wir schreiben können als

$$z \cdot c_z = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{Q})} \cdot c_z$$

Dem Hinweis folgend verwenden wir nun gerade dieselbe Idee für die Zahl $z := x + y$ für gegebene algebraische Zahlen $x, y \in \mathbb{C}$. Seien $f(X) = X^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{Q}[X]$ das Minimalpolynom von x über $\mathbb{Q}$ und $g(X) = X^m + \ldots + b_0$ das von y. Wie im Hinweis beschrieben setzen wir $(c_{x+y})_{ij} := x^i y^j$, $i = 0, \ldots, n-1$, $j = 0, \ldots, m-1$. Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
&(x+y)(c_{x+y})_{ij} = (x+y)x^i y^j = x^{i+1}y^j + x^i y^{j+1} \\
&= \begin{cases} x^{i+1}y^j + x^i y^{j+1} & \text{falls } i < n-1,\ j < m-1 \\ (-a_0 - a_1 x - \ldots - a_{n-1}x^{n-1})y^j + x^i y^{j+1} & \text{falls } i = n-1,\ j < m-1 \\ x^{i+1}y^j + x^i(-b_0 - b_1 y - \ldots - b_{m-1}y^{m-1}) & \text{falls } i < n-1,\ j = m-1 \\ (-a_0 - \ldots - a_{n-1}x^{n-1})y^i + x^i(-b_0 - \ldots - b_{m-1}y^{m-1}) & \text{falls } i = n-1,\ j = m-1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Hierbei handelt es sich offensichtlich wiederum um nm lineare Gleichungen in den $x^i y^j$ mit rationalen Koeffizienten, welches also eine Matrix $M \in \mathrm{Mat}(nm \times nm, \mathbb{Q})$ definieren mit $(x+y)c_{x+y} = M \cdot c_{x+y}$. Um M explizit zu beschreiben, können wir genauer ablesen[1]

$$
M_{ij,kl} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = i+1, l = j \text{ oder } k = i, l = j+1 \\ -a_k & \text{falls } i = n-1, l = j \\ -b_l & \text{falls } j = m-1, k = i \\ -(a_k + b_l) & \text{falls } i = n-1, j = m-1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
$$

[1]Wir nummerieren die Koordinaten von $\mathbb{Q}^{nm}$ zweckmäßigerweise durch Tupel ij, mit $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $j \in \{0, \ldots, m-1\}$.