H18-T3-A3

Mit $\mathbb{Q}$ bezeichnen wir den Körper der rationalen Zahlen.

Sei $f(X)$ ein irreduzibles Polynom fünften Grades über den rationalen Zahlen, dessen galoissche Gruppe isomorph zur symmetrischen Gruppe S_5 ist. Mit L bezeichnen wir den Zerfällungskörper von $f(X)$ über den rationalen Zahlen.

a) Welchen Grad hat L über $\mathbb{Q}$?

b) Seien $x_1, \ldots, x_5$ die Nullstellen von $f(X)$ in L. Kann der Fall $x_i = x_j$ mit $i \neq j$ auftreten? (Geben Sie eine kurze Begründung an.)

c) Für jedes $i = 0, \ldots, 5$ betrachten wir die Zwischenerweiterung $K_i = \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_i)$ (d.h. insb. $K_0 = \mathbb{Q}$) von L über $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie den Grad von K_{i+1} über K_i für $i = 0, \ldots, 4$.

d) Geben Sie die Begründungen dafür an, warum $f(X)$ über $\mathbb{Q}$ nicht, dafür aber über K_1 auflösbar ist.

Lösungsvorschlag. Zu a). Sei $G = \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f) = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$. Nach Angabe ist $G \cong S_5$ und somit $[L : \mathbb{Q}] = |G| = |S_5| = 120$.
Zu b). Als irreduzibles Polynom über einem Körper mit Charakteristik 0 ist $f(X)$ separabel, hat also keine vielfachen Nullstellen, mit anderen Worten $x_i = x_j$ genau dann wenn $i = j$.
Zu c). Für $i = 0, \ldots, 4$ sei $f_{i+1}(X) \in K_i[X]$ das Minimalpolynom von x_{i+1} über K_i und $g_{i+1}(X) \in K_i[X]$ ein Polynom mit Nullstelle x_{i+1}. Damit folgt

$$[K_{i+1} : K_i] = [K_i(x_{i+1}) : K_i] = \deg(f_{i+1}) \leq \deg(g_{i+1}).$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt dabei, da das Minimalpolynom von x_{i+1} jedes Polynom, das x_{i+1} als Nullstelle besitzt, teilt.
Wir setzen

$$g_{i+1}(X) = \frac{f(X)}{\prod_{k=1}^{i}(X - x_k)},$$

dann ist $g_{i+1}(x_{i+1}) = 0$ und $g_{i+1}(X) \in K_i[X]$ offenbar erfüllt und es gilt außerdem $\deg(g_{i+1}) = \deg(f) - i = 5 - i$. Damit wissen wir: $[K_{i+1} : K_i] \leq 5 - i$.
Außerdem gilt nach a) und dem Gradsatz

$$120 = [L : \mathbb{Q}] = [K_5 : K_4] \cdot \ldots \cdot [K_1 : K_0].$$

Falls $[K_{i+1} : K_i] < 5 - i$ für mindestens ein $i \in \{0, \ldots, 4\}$ gilt, folgt der Widerspruch

$$120 = [K_5 : K_4] \cdot \ldots \cdot [K_1 : K_0] < (5 - 4) \cdot \ldots \cdot (5 - 0) = 120.$$

Es muss also gelten $[K_{i+1} : K_i] = 5 - i$.
Zu d). Es ist $f(X)$ auflösbar über $\mathbb{Q}$, bzw. K_1 genau dann wenn $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f)$, bzw. $\mathrm{Gal}_{K_1}(f)$ auflösbar ist. Da $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f) \cong S_5$ und S_5 bekanntlich nicht auflösbar ist, ist $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f)$ ebenfalls nicht auflösbar. Dahingegen ist $\mathrm{Gal}_{K_1}(f) \cong S_4$ auflösbar, denn $\{\mathrm{Id}\} \lhd V_4 \lhd A_4 \lhd S_4$ ist eine Auflösung von S_4.