H18-T2-A3

Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe. Die *Torsion* $T(G)$ von G ist die Menge aller Elemente endlicher Ordnung von G. Die Gruppe heißt *torsionsfrei*, falls $T(G) = \{0_G\}$, wobei 0_G das neutrale Element von G bezeichnet.

a) Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie:
   (i) $T(G)$ ist eine Untergruppe von G.
   (ii) $G/T(G)$ ist torsionsfrei.

b) Geben Sie eine unendliche abelsche Gruppe mit nichttrivialer Torsion an.

Lösungsvorschlag. Zu a)(i). $T(G)$ ist eine Untergruppe, denn

- $0_G \in T(G)$, da $\operatorname{ord}(0_G) = 1$,
- für beliebige $a, b \in T(G)$ mit $\operatorname{ord}(a) = n < \infty, \operatorname{ord}(b) = m < \infty$ gilt (da G abelsch) $\operatorname{ord}(a + b) \mid \operatorname{kgV}(n, m) < \infty$ und somit ist $a + b \in T(G)$,
- für beliebige $a \in T(G)$ ist $-a \in T(G)$, da $\operatorname{ord}(-a) = \operatorname{ord}(a) < \infty$.

Zu a)(ii). Es ist zu zeigen, dass $T(G/T(G)) = \{[0_G]\}$.
Für $[g] \in T(G/T(G))$ existiert $n \in \mathbb{N}$, sodass $n \cdot [g] = [0_G]$, bzw. $[n \cdot g] = [0_G]$. Das ist genau dann der Fall, wenn $n \cdot g \in T(G)$, es existiert also $m \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{ord}(n \cdot g) = m$. Damit folgt direkt $\operatorname{ord}(g) \leq n \cdot m$, also $g \in T(G)$ und damit $[g] = [0_G]$.
Zu b). $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}$ ist eine unendliche abelsche Gruppe und offensichtlich ist die Torsion $T(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_n \times \{0\}$ nicht trivial.