H18-T2-A2

Sei L/K eine Körpererweiterung. Seien $n, m \in \mathbb{N}$, sei A eine $m \times n$-Matrix mit Koeffizienten in K und sei $b \in K^m$. Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ genau dann eine Lösung $x \in K^n$ hat, wenn es eine Lösung $x \in L^n$ hat.

Lösungsvorschlag. Zuerst halten wir fest, dass eine der beiden Implikationen trivial ist, es ist also nur zu zeigen: Hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ eine Lösung in L^n, so hat es auch eine Lösung in K^n. Es sei also $l \in L^n$ eine Lösung des Gleichungssystems, also $A \cdot l = b$ (existiert keine solche Lösung, so ist wiederum nichts zu zeigen). Wir wollen nun zeigen, dass eine Lösung in K^n existiert. Es sei r der Rang von A. Bekanntlich existieren Matrizen $S \in \mathrm{GL}_m(K)$ und $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $A = SA_rT$, mit

$$A_r = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(m \times n, K),$$

wobei E_r die $r \times r$-Einheitsmatrix ist (und die Einträge im Rest der $m \times n$-Matrix A_r nur aus 0 bestehen). Wir formen $SA_rTl = Al = b$ um zu

$$A_r(Tl) = S^{-1}b \in K^m.$$

Offenbar müssen also die ersten r Einträge des Vektors $Tl \in L^n$ bereits in K liegen, und wir definieren $\tilde{l} \in L^n$ durch $\tilde{l}_i = (Tl)_i$ für $l \leq r$ und $\tilde{l}_i = 0$ für $i > r$. Insbesondere ist nun also $\tilde{l} \in K^n$, und es gilt nach wie vor

$$A_r\tilde{l} = A_rTl = S^{-1}b.$$

Mit $y := T^{-1}\tilde{l}$ haben wir also

$$Ay = SA_rTT^{-1}\tilde{l} = SA_r\tilde{l} = SA_rTl = Al = b,$$

und nach Konstruktion $T^{-1}\tilde{l} \in K^n$.

Alternative Lösung:
Bekanntlich hat das Gleichungssystem $Ax = b$ eine Lösung in L^n genau dann wenn $\mathrm{rg}_L(A) = \mathrm{rg}_L(A|b)$[1] gilt und genauso existiert eine Lösung in K^n genau dann wenn $\mathrm{rg}_K(A) = \mathrm{rg}_K(A|b)$ gilt.
Wir müssen also nur noch zeigen, dass der Rang einer Matrix mit Koeffizienten in K über K dergleiche ist wie über L, d.h. die Maximalzahl der über K linear unabhängigen Spalten entspricht der Maximalzahl der über L linear unabhängigen Spalten.
Seien also $\{v_1, \ldots, v_l\} \subset K^m$. Wenn diese linear unabhängig über L sind, sind sie das trivialerweise auch über K. Wenn sie umgekehrt linear unabhängig über K sind, können wir $\{v_1, \ldots, v_l\}$ ergänzen zu einer Basis $\{v_1, \ldots, v_l, v_{l+1}, \ldots, v_m\}$ von K^m. Schreiben wir diese Vektoren als Spalten einer Matrix, also $M = (v_1| \ldots |v_m) \subset K^{m\times m}$, ist diese offenbar invertierbar (als Element von $K^{m\times m}$). Dann ist aber auch M, aufgefasst als Element von $L^{m\times m}$, invertierbar und damit sind die Spalten von M linear unabhängig über L; insbesondere sind die ersten l Spalten, also $\{v_1, \ldots, v_l\}$, linear unabhängig über L.

[1] Dabei ist $\mathrm{rg}_L(A) = \dim_L(\mathrm{Im}_L(A))$