H18-T2-A1

a) Man zeige, dass die beiden Zahlen $12n+1$ und $30n+2$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ teilerfremd sind.

b) Sei K ein Körper. Man zeige, dass der Polynomring $K[X]$ unendlich viele irreduzible Polynome enthält.
(Hinweis: Man verwende z.B. die Idee in Euklids Beweis der Unendlichkeit der Primzahlmenge.)

Lösungsvorschlag. Zu a).Für $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt: $\mathrm{ggT}(a,b) = 1 \Leftrightarrow \exists x, y \in \mathbb{Z} : ax + by = 1$.
Wir wollen also $x, y \in \mathbb{Z}$ finden mit

$$x(12n+1) + y(30n+2) = 1$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Eine kurze Rechnung ergibt

$$6n(2x+5y) + x + 2y = 1$$

und diese Gleichung ist erfüllt für $x = 5, y = -2 \in \mathbb{Z}$.
Zu b). Wir nehmen an, es gäbe endlich viele irreduzible Polynome in $K[X]$; die Menge dieser sei gegeben durch $M = \{f_1(X), \dots, f_n(X)\} \subseteq K[X]$.
Betrachte nun das Polynom $g(X) = f_1(X) \cdot \ldots \cdot f_n(X) + 1 \in K[X]$. Falls $g(X)$ irreduzibel ist, erhält man sofort einen Widerspruch, denn $g(X) \notin M$. Falls andererseits $g(X)$ reduzibel ist, existiert eine Zerlegung in irreduzible Elemente aus $K[X]$. Diese wiederum müssen nach Voraussetzung alle in M liegen, es gibt also ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $f_i(X) \mid g(X)$, was offensichtlich ein Widerspruch zur Konstruktion von $g(X)$ darstellt, denn es gilt $g(X) \equiv 1 \mod f_i(X)$, also $f_i(X) \nmid g(X)$.
Die Annahme, es gäbe endlich viele irreduzible Polynome in $K[X]$, war demnach falsch.