# H18-T1-A5

Sei $K = \{0, 1, a, b\}$ ein Körper mit vier Elementen (0 sei das Nullelement, 1 das Einselement).

a) Stellen Sie die Additions- und Multiplikationstabelle von $K$ auf.

b) Sei $f(X) = X^4 + X + 1 \in K[X]$. Zeigen Sie, dass $f$ reduzibel ist.

c) Bestimmen Sie den Grad des Zerfällungskörpers von $f$ über $K$.

*Lösungsvorschlag.* Zu a). Additions- und Multiplikationstabelle sind gegeben durch:

| $+$ | 0 | 1 | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | $a$ | $b$ |
| 1 | 1 | 0 | $b$ | $a$ |
| $a$ | $a$ | $b$ | 0 | 1 |
| $b$ | $b$ | $a$ | 1 | 0 |

| $\cdot$ | 0 | 1 | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | $a$ | $b$ |
| $a$ | 0 | $a$ | $b$ | 1 |
| $b$ | 0 | $b$ | 1 | $a$ |

Zu b). Da $f$ keine Nullstellen hat in $K$ ($f(0) = f(1) = f(a) = f(b) = 1 \neq 0$), kann es keine Teiler von Grad 1 geben.
Wir testen also auf Teiler von Grad 2. Seien dazu $g(X) = X^2 + cX + d$ und $h(X) = X^2+eX+f \in K[X]$ mit $f(X) = g(X)h(X)$. Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\begin{array}{rl} \text{(i)} & e + c = 0 \\ \text{(ii)} & ec + f + d = 0 \\ \text{(iii)} & ed + cf = 1 \\ \text{(iv)} & df = 1 \end{array}$$

Wegen (iv) muss entweder $d = f = 1$ oder oBdA $d = a$ und $f = b$ gelten. In ersterem Fall würde für (iii) $e + c = 1$ folgen, was ein Widerspruch zu (i) ist. Damit muss gelten $d = a$ und $f = b$. Aus (i) folgt außerdem $e = -c = c$. Setzt man beides in (iii), ein erhält man:

$$ea + eb = 1 \Rightarrow e(a + b) = 1 \Rightarrow e = 1$$

Insgesamt ergibt sich also $d = a, f = b, e = c = 1$ und damit hat man die folgende nicht triviale Zerlegung $f(X) = (X^2 + X + a)(X^2 + X + b)$ gefunden.
Zu c). Seien $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von $K$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \overline{K}$ die Nullstellen von $g$ und $\beta_1, \beta_2 \in \overline{K}$ die Nullstellen von $h$. Da $f$ keine Nullstellen in $K$ hat, sind $g$ und $h$ als Polynome von Grad 2 ohne Nullstellen in $K$ irreduzibel über $K$. Es gilt für jede Nullstelle $z \in \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \}$: $[K(z) : K] = 2$ und somit $|K(z)| = |K|^2 = 16$. Weil es in $\overline{K}$ nur einen Körper mit 16 Elementen gibt, muss $K(\alpha_1) = K(\alpha_2) = K(\beta_1) = K(\beta_2)$ gelten, also auch $\mathrm{Zerf}_K(f) = K(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = K(\alpha_1)$ und damit $[\mathrm{Zerf}_K(f) : K] = [K(\alpha_1) : K] = 2$.