H18-T1-A2

Sei G eine Gruppe.

a) Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe von endlichem Index. Zeigen Sie, dass die Menge $\{gHg^{-1} \mid g \in G\}$ endlich ist.

b) Es seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ und es seien $H_1, H_2 \subseteq G$ Untergruppen von G mit $[G : H_1] = n_1$ und $[G : H_2] = n_2$. Zeigen Sie, dass $[G : (H_1 \cap H_2)] \leq n_1 n_2$.

c) Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe von endlichem Index. Zeigen Sie, dass ein Normalteiler $N \subseteq G$ von endlichem Index existiert, für den $N \subseteq H$.

Lösungsvorschlag. Zu a). Sei $|G/H| = n < \infty$ und $M = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$. Betrachte die Surjektion $f : G/H \to M, \quad gH \mapsto gHg^{-1}$. Diese ist wohldefiniert, denn es gilt:

$$gH = aH \Rightarrow g^{-1}a \in H \Rightarrow (g^{-1}a)H(g^{-1}a)^{-1} = H \Rightarrow g^{-1}aHa^{-1}g = H \Rightarrow aHa^{-1} = gHg^{-1}.$$

Insbesondere gilt dann $|M| \leq |G/H| = n$, es ist also M endlich.
Zu b). Sei $H = H_1 \cap H_2$ und $K = G/H_1 \times G/H_2$.
Betrachte die Abbildung $f : G/H \to K, \quad gH \mapsto (gH_1, gH_2)$. Diese ist wohldefiniert und injektiv, denn:

$$\begin{aligned} f(gH) = f(aH) &\Leftrightarrow (gH_1, gH_2) = (aH_1, aH_2) \Leftrightarrow (gH_1 = aH_1) \wedge (gH_2 = aH_2) \\ &\Leftrightarrow (g^{-1}a \in H_1) \wedge (g^{-1}a \in H_2) \Leftrightarrow g^{-1}a \in H \Leftrightarrow gH = aH. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt dann $[G : (H_1 \cap H_2)] = |G/H| \leq |K| = n_1 n_2$.
Zu c). Sei $[G : H] = n < \infty$ und $M = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$ mit $|M| \leq n$ nach a). Setze $N := \bigcap_{\tilde{H} \in M} \tilde{H}$. Wir wollen zeigen, dass N die geforderten Eigenschaften erfüllt.
Offensichtlich gilt $N \subseteq H$ und N ist außerdem als Schnitt von Untergruppen wieder eine Untergruppe und nach Konstruktion somit eine Normalteiler.
Für den Index überlegt man sich Folgendes: für jedes $\tilde{H} \in M$ gilt $[G : \tilde{H}] = [G : H] = n$ (betrachte z.B. für ein $\tilde{H} = gHg^{-1}$ die Bijektion $G/H \to G/\tilde{H}, aH \mapsto ag^{-1}\tilde{H}$).
Die Aussage aus b) lässt sich leicht mit Induktion erweitern: für k Untergruppen $H_1, \ldots, H_k \subseteq G$ von G mit $[G : H_i] = n_i$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$ ist $[G : (H_1 \cap \ldots \cap H_k)] \leq n_1 \cdot \ldots \cdot n_k$.
Damit erhalten wir insgesamt:

$$[G : N] \leq \prod_{\tilde{H} \in M} [G : \tilde{H}] = \prod_{\tilde{H} \in M} n \leq n^n < \infty.$$