H15-T3-A3

Betrachten Sie das Polynom $f(X) = X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_5[X]$.

a) Zeigen Sie, dass $K := \mathbb{F}_5[X]/(f(X))$ ein Körper mit 25 Elementen ist.

b) Bestimmen Sie ein Element $w \in K$, mit $w^2 = 2$.

c) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{F}_5)$$

über K diagonalisierbar ist.

Lösungsvorschlag. Zu a). $f(X)$ hat offensichtlich keine Nullstelle in $\mathbb{F}_5$ und ist somit irreduzibel in $\mathbb{F}_5[X]$. Somit ist $K := \mathbb{F}_5[X]/(f(X))$ ein Körper, aufgrund von $\deg(f) = 2$ mit 25 Elementen.
Zu b). Ein Element aus K hat allgemein die Form $a + bX$ mit $a, b \in \mathbb{F}_5$. Für das gesuchte Element soll nun gelten (unter Verwendung der Identität $X^2 + X + 1 = 0$ in K)

$$2 = (a + bX)^2 = a^2 + 2abX + b^2X^2 = a^2 - b^2 + (2ab - b^2)X,$$

also

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 = 2 &\Rightarrow a^2 = 1 \text{ und } b^2 = 4 \\ &\Rightarrow a \in \{1, 4\} \text{ und } b \in \{2, 3\} \end{aligned}$$

sowie

$$2ab - b^2 = 0 \overset{b \neq 0, \text{ s.o.}}{\Rightarrow} b = 2a \Rightarrow a = 1,\ b = 2 \text{ oder } a = 4 = -1,\ b = 3 = -2.$$

Die beiden Elemente $x_1 := 1 + 2X$ und $x_2 = 4 - 3X = -x_1$ erfüllen $x_1^2 = 2 = x_2^2$ in $\mathbb{F}_5[X]/(f(X))$.
Zu c). Wir berechnen das charakteristische Polynom von A zu

$$c_A(Y) = \det(A - Y \cdot \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} 1 - Y & 2 \\ 3 & 4 - Y \end{pmatrix} = Y^2 + 3 \in K[Y].$$

Die Eigenwerte von A in K sind mithin $y_{1,2} = \pm\sqrt{-3} = \pm\sqrt{2} = x_{1,2} \in K$ für die in Aufgabenteil b) berechneten Wurzeln $x_{1,2}$ von 2. Insbesondere besitzt A über K zwei verschiedene Eigenwerte und ist damit diagonalisierbar.