H15-T3-A2

Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Es bezeichne $\varphi(n)$ den Wert der Euler'schen φ-Funktion bei n. Zeigen Sie, dass es genau $\varphi(n)$ verschiedene injektive Gruppenhomomorphismen $f\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ gibt.

Lösungsvorschlag. Die Wohldefiniertheit eines solchen Morphismus' erfordert $n \cdot f([1]) = [0] \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Somit sind alle Morphismen $f\colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ von der Form $f([1]) = [a/n]$, $a \in \mathbb{Z}$, wobei stets ein Repräsentant mit $0 \leq a < n$ gewählt werden kann. Ein solcher Morphismus n ist genau dann injektiv, wenn $[b \cdot a/n] = f([b]) = 0$ schon $[b] = 0$ impliziert, wenn also aus $b \cdot a \in n\mathbb{Z}$ bereits $b \in n\mathbb{Z}$ folgt. Dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$ ist. Die Anzahl *injektiver* Morphismen $f\colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist also gerade durch die $\varphi(n)$ möglichen Wahlen für ein solches a gegeben (es ist klar, dass verschiedene Wahlen von $0 \leq a < n$ verschiedene Morphismen ergeben).