H15-T2-A5

Sei $\xi = \sqrt{2+\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie das Minimalpolynom $m(X)$ von ξ über $\mathbb{Q}$.

b) Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})$ Galois'sch ist und berechnen Sie die Galoisgruppe.

Lösungsvorschlag. Zu a). Wir berechnen $\xi^2 = 2+\sqrt{2}$, also $(\xi^2-2)^2 = 2$, somit ist ξ eine Nullstelle des Polynomes

$$p(X) = X^4 - 4X^2 + 2 \in \mathbb{Q}[X].$$

Dieses ist nach dem Lemma von Gauß und dem Eisensteinkriterium für die Primzahl 2 irreduzibel über $\mathbb{Q}$ und damit das Minimalpolynom von ξ.
Zu b). Nun wollen wir zeigen, dass $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\xi)$ Galois'sch ist, dass also $\mathbb{Q}(\xi)$ bereits ein Zerfällungskörper von p über $\mathbb{Q}$ ist. Die weiteren Nullstellen diese Polynomes sind $\xi_2 := -\xi$, sowie $\xi_3 := \sqrt{2-\sqrt{2}}$ und $\xi_4 := -\xi_3$. Hierfür bleibt lediglich zu zeigen, dass $\xi_3 = \sqrt{2-\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}(\xi)$. Hierzu berechnen wir $\xi_3\xi = \sqrt{2}$ und beobachten, dass $\xi^2-2 = \sqrt{2}$, also

$$\xi_3 = \frac{\xi^2-2}{\xi} \in \mathbb{Q}(\xi).$$

Damit ist $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\xi)$ Galoisch und wir nennen $G := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi)|\mathbb{Q})$. Die $|G| = [\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}] = \deg(p) = 4$ Elemente von $G = \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\xi))$ sind eindeutig durch das jeweilige Bild von ξ bestimmt, $G = \{\mathrm{Id} =: \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_3\}$ mit $\sigma_2 \colon \xi \mapsto -\xi = \xi_2$, $\sigma_3 \colon \xi \mapsto \xi_3$ und $\sigma_4 \colon \xi \mapsto \xi_4 = -\xi_3$. Wir wollen noch den Isomorphietyp von G bestimmen: Als Gruppe der Ordnung vier gibt es hierfür nur zwei Möglichkeiten: $G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ oder $G \simeq \mathbb{Z}_4$. Wir können den Unterschied anhand der Anzahl der Elemente von Ordnung 2 feststellen (gibt es mindestens zwei davon, so ist $G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, andernfalls $G \simeq \mathbb{Z}_4$). Offensichtlich ist $\mathrm{ord}(\sigma_2) = 2$. Wir berechnen

$$\sigma_3^2(\xi) = \sigma_3(\xi_3) = \sigma_3\left(\frac{\xi^2-2}{\xi}\right) = \frac{\sigma_3(\xi)^2-2}{\sigma_3(\xi)} = \frac{\xi_3^2-2}{\xi_3} = \frac{\xi}{\xi^2-2} \cdot \frac{(\xi^2-2)^2-2\xi^2}{\xi^2} =$$
$$= \frac{1}{\xi^2-2} \cdot \frac{\xi^4-6\xi^2+4}{\xi} = \frac{-2\xi^2+2}{\xi(\xi^2-2)} = -\frac{\xi^2}{\xi} = -\xi,$$

also $\sigma_3^2 \neq \mathrm{Id}$ und damit $\mathrm{ord}(\sigma_3) = 4$, das heißt $G \simeq \mathbb{Z}_4$.