H15-T2-A4

Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung und seien $\alpha, \beta \in L$ algebraisch über K. Sei f das Minimalpolynom von α über K und g das Minimalpolynom von β über K. Zeigen Sie, dass f irreduzibel über $K(\beta)$ ist genau dann, wenn g irreduzibel über $K(\alpha)$ ist.

Lösungsvorschlag. Wir betrachten das folgende Diagramm von Körpererweiterungen mit zugehörigen Graden:

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & K(\alpha,\beta) \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "y"] & \\
K(\alpha) \arrow[dr, "\deg(f)"'] & & K(\beta) \arrow[dl, "\deg(g)"] \\
 & K &
\end{tikzcd}$$

Wir wissen nun, dass gilt $x\deg(f) = y\deg(g)$, also insbesondere $x = \deg(g)$ genau dann, wenn $y = \deg(f)$. Fasst man $g(X)$ als Polynom in $K(\alpha)[X]$ auf, so gilt $x = \deg(g)$ genau dann, wenn g irreduzibel über $K(\alpha)$ ist und analog für $f \in K(\beta)$. Noch einmal zusammengefasst können wir also argumentieren

$$g \text{ irreduzibel über } K(\alpha) \Leftrightarrow x = \deg(g) \Leftrightarrow y = \deg(f) \Leftrightarrow f \text{ irreduzibel über } K(\beta).$$