H15-T2-A3

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ die wie folgt rekursiv definierte Folge ganzer Zahlen:

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = a_n^2 + 1 \quad \text{für } n \geq 0.$$

Sei $N \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie: Ist N ein Teiler von a_n, dann teilt N auch a_{kn} für alle $k \geq 2$.

Lösungsvorschlag. Es genügt offensichtlich, zu zeigen, dass

$$a_{kn} \equiv 0 \mod a_n \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Wir wollen den Beweis durch Induktion über k führen, der Induktionsanfang für $k = 1$ ist dabei klar. Es bleibt also zu zeigen, dass $a_{kn} \equiv 0 \mod a_n$ impliziert, dass $a_{(k+1)n} \equiv 0 \mod a_n$. Dazu wollen wir zeigen, dass gilt

$$a_{kn+m} \equiv a_m \mod a_n \quad \text{für alle } m \geq 0. \tag{1}$$

Dies zeigen wir vermittels einer weiteren kurzen Induktion (über m): Für $m = 0$ ist nach Induktionsvoraussetzung der äußeren Induktion über k nichts zu zeigen. Weiter ist

$$a_{kn+m+1} = a_{kn+m}^2 + 1 \equiv a_m^2 + 1 = a_{m+1} \mod a_n$$

nach der inneren Induktionsvoraussetzung womit die innere Induktion abgeschlossen ist. Damit haben wir aber auch gezeigt, dass

$$a_{(k+1)n} = a_{kn+n} \equiv a_n \equiv 0 \mod a_n$$

gilt und damit die äußere Induktion abgeschlossen.