H15-T2-A2

Wieviele Elemente der Ordnung 15 gibt es in der symmetrischen Gruppe S_8?

Lösungsvorschlag. Jede Permutation lässt sich als das Produkt disjunkter Zykel schreiben, die Ordnung eines solchen Produktes ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Zykellängen. Ein Element der Ordnung 15 in S_8 muss daher ein Produkt von disjunkten Zykeln der Längen 3 bzw. 5 sein, genauer gesagt das Produkt von jeweils einem Zykel der Länge 3 und einem dazu disjunkten Zykel der Länge 5. Für eine solche Aufteilung von 8 Elementen zu drei und fünf gibt es $\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$ Möglichkeiten. Es gibt weiter $(n-1)!$ Zykel der Länge n (entsprechend den $n!$ Permutationen der n zu vertauschenden Elemente und der Tatsache, dass Zykel invariant unter Verschiebung der Einträge sind, das bedeutet $(\, a_1\, a_2\, \ldots\, a_n\,) = (\, a_2\, \ldots\, a_n\, a_1\,)$). Die Anzahl der Elemente von Ordnung 15 in S_8 ist also

$$\binom{8}{3} 2!4! = 2688.$$