H15-T2-A1

Bestimmen Sie alle Matrizen A in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, die mit der Matrix

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kommutieren.

Lösungsvorschlag. Der Ansatz

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

liefert

$$\begin{pmatrix} a & a+c \\ b & b+d \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ b & d \end{pmatrix}$$

und somit $a = d$, $b = 0$, das heißt, alle Matrizen aus $\mathrm{Mat}^{2\times 2}(\mathbb{C})$ der Form

$$\begin{pmatrix} a & a+c \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

mit $a, c \in \mathbb{C}$ bzw. kommutieren mit X. Eine solche Matrix liegt in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ genau dann, wenn $a \neq 0$. Die gesuchte Menge ist also

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & a+c \\ 0 & a \end{pmatrix} \ : \ a, c \in \mathbb{C}, \ a \neq 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & \tilde{c} \\ 0 & a \end{pmatrix} \ : \ a, \tilde{c} \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}).$$