H15-T1-A5

Sei $\zeta_5 \in \mathbb{C}$ eine primitive fünfte Einheitswurzel, $\zeta_7 \in \mathbb{C}$ eine primitive siebte Einheiswurzel und $u = \zeta_7 + \zeta_7^{-1}$. Zeigen Sie:

a) $[\mathbb{Q}(\zeta_7) : \mathbb{Q}(u)] = 2$,

b) $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}] = 3$,

c) $[\mathbb{Q}(u, \zeta_5) : \mathbb{Q}] = 12$.

d) Die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(u, \zeta_5)|\mathbb{Q})$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

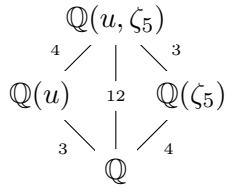
Lösungsvorschlag. Zu a). Offensichtlich ist $\mathbb{Q}(\zeta_7) \not\subset \mathbb{Q}(u)$, nachdem $\mathbb{Q}(u) \subset \mathbb{R}$ aber $\zeta_7 \notin \mathbb{R}$. Weiter berechnen wir $\zeta_7 \cdot u = \zeta_7^2 + 1$, also ist $X^2 - uX + 1 \in \mathbb{Q}(u)[X]$ nach unserer Vorüberlegung das Minimalpolynom von ζ_7 über $\mathbb{Q}(u)$.
Zu b). Wir wissen, dass gilt $[\mathbb{Q}(\zeta_7) : \mathbb{Q}] = 6$. Wir betrachten nun die Körpererweiterungen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(u) \subset \mathbb{Q}(\zeta_7)$ und erhalten

$$6 = [\mathbb{Q}(\zeta_7) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\zeta_7) : \mathbb{Q}(u)] \cdot [\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot [\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}].$$

Also $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}] = 3$.
Zu c). Wiederum aufgrund der Gradformel für Körpererweiterungen wissen wir

$$12 = \mathrm{kgV}([\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}], [\mathbb{Q}(\zeta_5), \mathbb{Q}]) \leq [\mathbb{Q}(u, \zeta_5) : \mathbb{Q}] \leq [\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}] \cdot [\mathbb{Q}(\zeta_5) : \mathbb{Q}] = 12,$$

also $[\mathbb{Q}(u, \zeta_5) : \mathbb{Q}] = 12$. Beim letzten Ungleichheitszeichen haben wir dabei verwendet, dass das Minimalpolynom $\phi_5(X) = X^4 + \ldots + X + 1 \in \mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{Q}(u)[X]$ ein Polynom ist, welches ζ_5 als Nullstelle hat, also $[\mathbb{Q}(u, \zeta_5) : \mathbb{Q}(u)] \leq \deg(\phi_5) = [\mathbb{Q}(\zeta_5) : \mathbb{Q}]$.
Zu d). Zu zeigen ist, dass die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(u, \zeta_5)|\mathbb{Q})$ isomorph zu $\mathbb{Z}_{12}$ ist, wobei $u := \zeta_7 + \zeta_7^{-1} = \zeta_7 + \zeta_7^6$. Aus Aufgabenteil c) haben wir das folgende Diagramm von Körpererweiterungen und zugehörigen Graden:



Nun wissen wir, dass $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\zeta_5)$ eine Galois-Erweiterung ist mit Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_5)|\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}_4$. Die Aussage wäre dann klar, wenn wir wüssten, dass

1. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(u)$ ebenfalls eine Galois-Erweiterung ist, und
2. $\mathbb{Q}(u) \cap \mathbb{Q}(\zeta_5) = \mathbb{Q}$ ist,

denn dann hätten wir

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(u,\zeta_5)|\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(u)|\mathbb{Q}) \times \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_5)|\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \simeq \mathbb{Z}_{12}.$$

Der Punkt 2. ist dabei offensichtlich wahr, denn $\mathbb{Q}(u) \cap \mathbb{Q}(\zeta_5)$ ist ein Unterkörper sowohl von $\mathbb{Q}(u)$ also auch von $\mathbb{Q}(\zeta_5)$, und damit

$$[\mathbb{Q}(u) \cap \mathbb{Q}(\zeta_5) : \mathbb{Q}] \text{ teilt } \mathrm{ggT}([\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}], [\mathbb{Q}(\zeta_5) : \mathbb{Q}]) = 1.$$

Für Punkt 1. wollen wir zeigen, dass $\mathbb{Q}(u)$ Zerfällungskörper des Minimalpolynomes f_u von u über $\mathbb{Q}$ ist. Wir betrachten dazu die Körpererweiterungen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(u) \subset \mathbb{Q}(\zeta_7)$. Nun ist

$$g_u := \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_7)|\mathbb{Q})} (X - \sigma(u))$$

bekanntlich ein Polynom aus $\mathbb{Q}[X]$ (welches insbesondere u als Nullstelle hat, also von f_u geteilt wird). Explizit erhalten wir

$$g_u(X) = ((X-u)(X-u_2)(X-u_3))^2 \text{ mit } u_2 = \zeta_7^2 + \zeta_7^{-2},\ u_3 = \zeta_7^3 + \zeta_7^{-3}.$$

Wir setzen $\tilde{f}_u(X) := (X-u)(X-u_2)(X-u_3)$ und wollen zeigen, dass dies schon ein Polynom in $\mathbb{Q}[X]$ und somit unser gesuchtes Minimalpolynom f_u ist:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_u(X) := (X-u)(X-u_2)(X-u_3) = \\ X^3 - (u+u_2+u_3)X^2 + (uu_2+uu_3+u_2u_3)X - uu_2u_3 = \\ = X^3 + X^2 - 2X - 1 \in \mathbb{Q}[X].\end{aligned}$$

Somit bleibt also nur noch, zu zeigen, dass $u_2, u_3 \in \mathbb{Q}(u)$ gilt. Dazu berechnen wir:

$$\begin{aligned}u^2 &= \zeta_7^2 + \zeta_7^{-2} + 2 \text{ , also } u_2 \in \mathbb{Q}(u) \\ u^3 &= \zeta_7^3 + 3\zeta_7 + 3\zeta_7^{-1} + \zeta_7^{-3} = u_3 - 3u \text{ , also } u_3 \in \mathbb{Q}(u).\end{aligned}$$