H15-T1-A3

Bestimmen Sie bis auf Isomorphie sämtliche endliche Gruppen G der Ordnung $143 = 11 \cdot 13$.

Lösungsvorschlag. Da 11 nicht $13 - 1 = 12$ teilt folgt aus den Sylow-Sätzen, dass G Normalteiler N_1, N_2 der Ordnungen 11 und 13 hat. Insbesondere müssen beide zyklisch (und damit abelsch) sein und aufgrund der (verschiedenen) Primordnungen folgt $N_1 \cap N_2 = \{e\}$ wobei e das neutrale Element der Gruppe G bezeichnen soll. Sei nun $x, y \in G$ beliebig. Wir wollen zeigen, dass $xy = yx$ bzw. äquivalent $z := xyx^{-1}y^{-1} = e$ gilt, also nehmen wir ohne Einschränkung $x \in N_1$ und $y \in N_2$ an. Dann gilt aufgrund der Normalteilereigenschaft von N_2, dass $z \in N_2$ und symmetrisch dazu aufgrund der Tatsache, dass N_1 Normalteiler ist, dass $z \in N_1$, also insgesamt $z \in N_1 \cap N_2 = \{e\}$. Also ist $z = e$ und damit G eine abelsche Gruppe von Ordnung $11 \cdot 13$ und somit $G \simeq \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{13} \simeq \mathbb{Z}_{143}$, d. h. bis auf Isomorphie gibt es nur eine Gruppe der Ordnung 143.
Bemerkung: Der Beweis funktioniert völlig analog für zwei beliebige verschiedene Primzahlen $p < q$ für die p nicht $q - 1$ teilt. Man erhält also, dass für solche Primzahlen bis auf Isomorphie nur eine Gruppe der Ordnung pq existiert, nämlich $\mathbb{Z}_{pq}$.