H15-T1-A2

Sei $\mathbb{F}_q$ der endliche Körper mit q Elementen.

a) Zeigen Sie, dass für $n \geq 1$ die Anzahl der eindimensionalen $\mathbb{F}_q$-Untervektorräume von $\mathbb{F}_q^n$ gleich $\frac{q^n-1}{q-1}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass die Anzahl der zweidimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{F}_q^3$ gleich der Anzahl der eindimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{F}_q^3$ ist.

c) Wie viele Zerlegungen von $\mathbb{F}_q^3$ in direkte Summen von $\mathbb{F}_q$-Untervektorräumen $V_1 \oplus V_2$ gibt es mit $\dim_{\mathbb{F}_q}(V_1) = 2$?

Lösungsvorschlag. Zu a). Der Vektorraum $\mathbb{F}_q^n$ besitzt q^n Elemente. Sei $a \neq 0$ ein solches Element (von diesen gibt es entsprechend $q^n - 1$), dann definiert a einen eindimensionalen Unterraum $a \cdot \mathbb{F}_q$, und umgekehrt ist jeder eindimensionale Vektorraum offensichtlich von dieser Form. Allerdings definiert $a \cdot x$ für $x \in \mathbb{F}_q^\times$ (von diesen gibt es $|\mathbb{F}_q^\times| = q - 1$) den selben Unterraum wie a, wir erhalten also für die Anzahl der Unterräume $(q^n - 1)/(q - 1)$ wie gewünscht.

Zu b). Ein Untervektorraum der Dimension 2 wird durch die Wahl einer Basis bestimmt, also zweier Elemente $a, b \in \mathbb{F}_q^3$, so dass $a \neq 0$ und $b \notin a \cdot \mathbb{F}_q$. Für die Wahl von a ergeben sich wie gehabt $q^3 - 1$ Möglichkeiten, für b dementsprechend $q^3 - q$. Hat man eine Basis a, b, entsprechend einem Unterraum $V := \langle a, b \rangle$, gewählt, so erhält man die Paare $a', b' \in \mathbb{F}_q^3$ mit $\langle a', b' \rangle = V$ gerade als die Bilder von a, b unter den Elementen aus $\mathrm{Aut}(V)$ [1]. Mit $\mathrm{Aut}(V) \simeq \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)$ ergibt sich $|\mathrm{Aut}(V)| = |\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)| = (q^2-1)(q^2-q)$.[2] Die Anzahl zweidimensionaler Unterräume erhalten wir also zu

$$\frac{(q^3-1)(q^3-q)}{(q^2-1)(q^2-q)} = \frac{(q^3-1)q}{q^2-q} = \frac{q^3-1}{q-1}.$$

Zu c). Sei V_1 ein beliebiger zweidimensionaler Unterraum von $\mathbb{F}_q^3$. Wir wollen bestimmen, wie viele eindimensionale Komplemente V_2, das heißt eindimensionale Unterräume V_2 mit $\mathbb{F}_q^3 = V_1 \oplus V_2$, es zu diesem V_1 gibt. Ist N diese Anzahl, dann erhalten wie die gesuchte Anzahl möglicher Zerlegungen zu $N(q^3-1)/(q-1)$. Sei nun e_1, e_2 eine Basis von V_1. Wir ergänzen dies zu einer Basis von e_1, e_2, a von $\mathbb{F}_q^3$ (jedes $a \in \mathbb{F}_q^3 \setminus V_1$ erfüllt diesen Zweck). Nun sind alle möglichen eindimensionalen Komplemente zu V_1 von der Form $V_2 = a'\mathbb{F}_q$

[1] Ergänzen wir a, b zu einer Basis a, b, c von $\mathbb{F}_q^3$, so fassen wir $\mathrm{Aut}(V)$ als diejenige Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q^3)$ auf, die aus Automorphismen φ mit $\varphi(\langle a, b \rangle) = \langle a, b \rangle$ und $\varphi(c) = c$ besteht, welche in Matrixdarstellung bezüglich dieser Basis also in Blockform aus einer invertierbaren 2×2-Matrix und einem Diagonaleintrag 1 vorliegen.

[2] Wir wollen die Anzahl aller invertierbaren 2×2-Matrizen über $\mathbb{F}_q$ berechnen. Dazu überlegen wir uns, dass die erste Spalte ein beliebiger von Null verschiedener Vektor aus $\mathbb{F}_q^2$ sein kann, für die Wahl eines solchen gibt es $q^2 - 1$ Möglichkeiten. Die zweite Spalte muss linear unabhängig von der ersten, das heißt ein Element aus $\mathbb{F}_q^2 - \langle \text{erste Spalte} \rangle$ sein, hierfür bleiben demnach $q^2 - q$ Elemente zur Auswahl. Diese Überlegung lässt sich einfach auf höhere Dimensionen verallgemeinern, für $|\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)|$ erhält man das Ergebnis $(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \cdots (q^n - q^n - 1)$.

mit $a' = xe_1 + ye_2 + za$ wobei $z \neq 0$. Wie zuvor definieren dabei je $q-1$ Elemente denselben eindimensionale Unterraum, so dass wir insgesamt

$$N = \frac{q^2(q-1)}{q-1} = q^2$$

verschiedene Komplemente V_2 zählen. Es existieren also $q^2 \frac{q^3-1}{q-1}$ Zerlegungen von $\mathbb{F}_q^3$ der gesuchten Form $\mathbb{F}_q^3 = V_1 \oplus V_2$, $\dim(V_1) = 2$, $\dim(V_2) = 1$.