

H15-T1-A1

Bestimmen Sie sämtliche Lösungen der Gleichung $x^6 - 2x + 4 = 0$ im Ring $\mathbb{Z}/64\mathbb{Z}$.

Tipp: Führen Sie eine Fallunterscheidung je nach Bild von x in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ durch und beachten Sie, dass $64 = 2^6$.

Lösungsvorschlag. Wir unterscheiden wie im Tipp geraten zwei Fälle:

Fall 1: $x = 1 \pmod{2}$ — dieser Fall kann nicht eintreten, da dann $x^6 - 2x + 4 = 1 \neq 0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist.

Fall 2: Es muss also $x = 0 \pmod{2}$ gelten, damit ist aber $x = 2n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ und somit $x^6 = 2^6 n^6 = 64n^6 = 0 \pmod{64}$. Somit ist die Gleichung $2x = 4$ in $\mathbb{Z}/64\mathbb{Z}$ zu lösen. Eine offensichtliche Lösung ist $x_1 = 2$, und ist x_2 eine weitere Lösung, dann gilt also $2(x_1 - x_2) = 0 \in \mathbb{Z}/64\mathbb{Z}$ und somit $x_1 = x_2 \pmod{32}$. Sämtliche Lösungen in $\mathbb{Z}/64\mathbb{Z}$ sind also $\{2, 34\}$ (oder allgemeiner von der Form $2 + 32 \cdot k$, $k \in \mathbb{N}$, hier wurden zwei Repräsentanten ausgewählt).