H13-T3-A4

Sei p eine Primzahl, $e, n \in \mathbb{N}$ und G eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$ mit p^e Elementen. Zeigen Sie: Es gibt einen Spaltenvektor $0 \neq v \in \mathbb{F}_p^n$ mit $\gamma \cdot v = v$ für alle $\gamma \in G$. (Hinweis: Betrachten Sie die Bahnlängen von G auf $\mathbb{F}_p^n$.)

Lösungsvorschlag. Wie in der Aufgabenstellung betrachten wir die Wirkung von G auf $\mathbb{F}_p^n$ (die von der kanonischen Wirkung von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$ auf $\mathbb{F}_p^n$ induziert wird). Nach Definition der Bahnen dieser Wirkung gilt für ein $v \in \mathbb{F}_p^n$ genau dann $\gamma \cdot v = v \ \forall \gamma \in G$, wenn die Bahn $G \cdot v$ nur aus v besteht, also $G \cdot v = \{v\}$. Bekanntlich ist für ein beliebiges $v \in \mathbb{F}_p^n$ die Länge der Bahn gegeben durch $|G \cdot v| = |G|/|G_v|$, wobei G_v die Standgruppe von G an v bezüglich der betrachteten Wirkung ist. Insbesondere gilt also $|G \cdot v| \big| |G|$, also $|G \cdot v| = p^x$ für ein $\mathbb{N} \cup \{0\} \ni x \leq e$. Weiter ist offensichtlich $\gamma \cdot 0 = 0$ für alle $\gamma \in G$, also $|G \cdot 0| = 1$. Bekanntlich bilden die Bahnen eine disjunkte Zerlegung von $\mathbb{F}_p^n$. Ist nun $0, v_1, \ldots, v_s$ ein Repräsentantensystem der Bahnen, so gilt also

$$p^n = |\mathbb{F}_p^n| = 1 + \sum_{i=1}^{s} |G \cdot v_i|.$$

Definieren wir $j_1, \ldots, j_s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ so, dass $|G \cdot v_i| = p^{j_i}$ ist, so müssen nach obiger Gleichung also $i \in \{1, \ldots, s\}$ existieren mit $j_i = 0$, da sonst die rechte Seite nicht (wie die linke) durch p teilbar wäre). Für ein solches $0 \neq v_i$ gilt dann aber gerade $|G \cdot v_i| = 1$, also $G \cdot v_i = v_i$ wie gewünscht.