H10-T3-A4

Betrachten Sie die Körperweiterung $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{11})$ von $\mathbb{Q}$.

a) Zeigen Sie, dass K Galoissch über $\mathbb{Q}$ ist und bestimmen Sie die Galoisgruppe.

b) Bestimmen Sie alle Teilkörper von K.

c) Bestimmen Sie ein primitives Element von K über $\mathbb{Q}$.

Lösungsvorschlag. Zu a). K ist der Zerfällungskörper $K = \mathrm{Zerf}_{\mathbb{Q}}(X^2 - 2, X^2 - 11)$ und als solcher normal über $\mathbb{Q}$ nach Definition. Da außerdem $X^2 - 2, X^2 - 11 \in \mathbb{Q}[X]$ separabel sind, ist $\mathbb{Q} \subset K$ außerdem separabel, und damit Galoissch. Nach Aufgabe 4 vom Übungsblatt "Galoistheorie I" wissen wir wegen $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}(\sqrt{11}) = \mathbb{Q}$, dass gilt:

$$\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})|\mathbb{Q}) \times \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{11})|\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

Expliziter sind die Automorphismen von K über $\mathbb{Q}$ eindeutig durch die Bilder von $\sqrt{2}$ und $\sqrt{11}$ bestimmt, und wir können die vier Automorphismen aus $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q}) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$ konkret angeben, als

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} \mapsto \sqrt{2} \\ \sqrt{11} \mapsto \sqrt{11} \end{pmatrix}}_{=\mathrm{Id}}, \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} \mapsto \sqrt{2} \\ \sqrt{11} \mapsto -\sqrt{11} \end{pmatrix}}_{=:\sigma_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2} \\ \sqrt{11} \mapsto \sqrt{11} \end{pmatrix}}_{=:\sigma_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2} \\ \sqrt{11} \mapsto -\sqrt{11} \end{pmatrix}}_{=:\sigma_3}$$

(jedes der beiden Elemente muss stets wieder auf eine der Nullstellen seines Minimalpolynomes abgebildet werden).

Zu b). Jeder Teilkörper E von K ist automatisch eine Erweiternug des Primkörpers $\mathbb{Q}$ von K, also eine Zwischenerweiterung der Form $\mathbb{Q} \subset E \subset K$. Da die Galoisgruppe $G := \mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q})$ nach Teil a) vom Isomorphietyp $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ist, besitzt sie genau drei echte (d. h. von $\{\mathrm{Id}\}$ und G verschiedene) Untergruppen. Nach dem Hauptsatz der Galoistheorie besitzt $\mathbb{Q} \subset K$ also genau drei echte (von $\mathbb{Q}$ und K verschiedene) Zwischenerweiterungen. Wir kennen bereits zwei verschiedene echte Zwischenerweiterungen, nämlich $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset K$, welches der Fixkörper der Untergruppe $\{\mathrm{Id}, \sigma_1\}$ ist, und $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{11}) \subset K$, den Fixkörper von $\{\mathrm{Id}, \sigma_2\}$. Der Fixkörper zu $\{\mathrm{Id}, \sigma_3\}$ ist $\mathbb{Q}(\sqrt{2} \cdot \sqrt{11}) = \mathbb{Q}(\sqrt{22})$ ($\sqrt{22}$ bleibt offensichtlich invariant unter σ_3 und $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{11}) : \mathbb{Q}(\sqrt{22})] = 2 = |\{\mathrm{Id}, \sigma_3\}|$, womit wir alle Teilkörper von K bestimmt haben zu

$$\mathbb{Q},\ \mathbb{Q}(\sqrt{2}),\ \mathbb{Q}(\sqrt{11}),\ \mathbb{Q}(\sqrt{22}),\ K$$

Zu c). Das Element $\alpha := \sqrt{2} + \sqrt{11} \in K$ hat nach Konstruktion die Eigenschaft $\sigma_i(\alpha) \neq \alpha$ für $i = 1, 2, 3$. Insbesondere ist die Standgruppe von $G := \mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q})$ an α gerade $G_\alpha = \{\mathrm{Id}\}$, also $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q}(\alpha)) = \{\mathrm{Id}\}$, womit nach dem Hauptsatz der Galoistheorie gelten muss $\mathbb{Q}(\alpha) = K$. Somit ist α in der Tat primitives Element.