H10-T3-A2

a) Zeigen Sie: Jede endlich erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{Q},+)$ ist zyklisch.

b) Geben Sie eine echte nichtzyklische Untergruppe von $(\mathbb{Q},+)$ an. Zu a). Offenbar genügt es, zu zeigen, dass eine von zwei Elementen erzeugte Untergruppe

$$\langle a_1/b_1, a_2/b_2\rangle \subset (\mathbb{Q},+)$$

zyklisch ist, also von der Form $\langle a/b\rangle$.

Lösungsvorschlag. Dazu schreiben wir nach entsprechender Erweiterung und mit $b := \operatorname{kgV}(a_1, a_2)$ die Erzeuger als $a_i/b_i = \tilde{a}_i/b$ für $i = 1, 2$. Ist dann $a := \operatorname{ggT}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$, so ist

$$\langle a_1/b_1, a_2/b_2\rangle = \langle a/b\rangle,$$

denn:
"$\subset$" Nach Definition von a existieren $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_i a/b = \tilde{a}_i/b = a_i/b_i$ für $i = 1, 2$.
"$\supset$" Umgekehrt erhalten wir mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus' $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $r\tilde{a}_1 + s\tilde{a}_2 = a$, also

$$r(a_1/b_1) + s(a_2/b_2) = (r\tilde{a}_1 + s\tilde{a}_2)/b = a/b.$$

Zu b). Betrachte die Untergruppe

$$G := \langle a/2^n | a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\rangle \subset (\mathbb{Q},+).$$

G ist nicht zyklisch, denn für jedes Element $a_0/2^{n_0} \in G$ ist $1/2^{n_0+1} \in G \setminus \langle a_0/2^{n_0}\rangle$.