

H10-T3-A1

Eine Gruppe der Ordnung 91 operiere auf einer Menge mit 71 Elementen. Zeigen Sie: Die Operation hat einen Fixpunkt.

Lösungsvorschlag. Für die Längen der Bahnen der Wirkung kommen die Faktoren 1, 7, 13 von 91 in Frage. Die Existenz einer Bahn der Länge 1 ist nach Definition äquivalent zur Existenz eines Fixpunktes der Wirkung. Wir wollen also zeigen, dass die Gleichung

$$71 = r \cdot 7 + s \cdot 13$$

mit $r, s \in \mathbb{N}$ nicht lösbar ist. Wir betrachten die Gleichung dazu $\pmod{13}$ und erhalten

$$6 = r \cdot 7 \pmod{13},$$

also $r = 12 \pmod{13}$. Insbesondere müsste also gelten $r \geq 12$ was bereits für $r = 12$ mit $r \cdot 7 = 84 > 71$ einen Widerspruch zu $s > 0$ liefert. Es muss folglich (mindestens) eine Bahn der Länge 1 existieren.