H10-T2-A5

Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{Z})$ eine ganzzahlige $n \times n$-Matrix mit $A^p = E$ für eine Primzahl p und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\det(A - E)$ ganzzahlig und durch p teilbar ist. (E bezeichnet die Einheitsmatrix.)

Lösungsvorschlag. Da $A - E$ ganzzahlige Einträge besitzt und die Determinante ein Polyonm mit ganzen Koeffizienten in diesen Einträgen ist, ist $\det(A - E) \in \mathbb{Z}$. Die kanonische projektion $\pi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ induziert eine Abbildung (tatsächlich einen Morphismus von Halbgruppen) $\overline{\pi}\colon M_{n,n}(\mathbb{Z}) \to M_{n,n}(\mathbb{Z}_p)$ und es gilt $\det \circ \overline{\pi} = \pi \circ \det$ (als Abbildungen bzw. Morphismen von Halbgruppen $M_{n,n}(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}_p$). Damit

$$p \mid \det(A - E) \quad \Leftrightarrow \quad \pi(\det(A - E)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(\overline{\pi}(A - E)) = 0.$$

Wir nennen $\overline{A} := \overline{\pi}(A)$ und $\overline{E}$ die Einheitsmatrix in $M_{n,n}(\mathbb{Z}_p)$. Dann ist also nach Voraussetzung $\overline{A}^p = \overline{\pi}(A)^p = \overline{E}^p = \overline{E}$ und, da $\overline{E}\overline{A} = \overline{A} = \overline{A}\overline{E}$ gilt (also $\overline{A}$ trivialerweise mit $\overline{E}$ kommutiert), erhalten wir

$$(\overline{A} - \overline{E})^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \overline{A}^i (-\overline{E})^{p-1} = \overline{A}^p - \overline{E}^p = \overline{A}^p - \overline{E} = 0 \in M_{n,n}(\mathbb{Z}_p).$$

Damit folgt also schließlich

$$\det(\overline{A} - \overline{E})^p = \det((\overline{A} - \overline{E})^p) = \det(0) = 0 \in \mathbb{Z}_p$$

und damit $\pi(\det(A - E)) = \det(\overline{\pi}(A - E)) = \det(\overline{A} - \overline{E}) = 0$ und so das gewünschte Ergebnis.