H10-T2-A4

Für $1 \leq m \in \mathbb{N}$ betrachte man das Polynom $f_m(X) = X^{2m} + X^m + 1 \in \mathbb{Z}[X]$. Zeigen Sie:

a) Jede komplexe Nullstelle von f_m ist eine Einheitswurzel.

b) f_m ist genau dann irreduzibel über $\mathbb{Q}$, wenn $m = 3^k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Lösungsvorschlag. Zu a). Sei $\Phi(X) = X^2 + X + 1$ das dritte Kreisteilungspolynom. Wir beobachten, dass $f_m(X) = \Phi(X^m)$ gilt. Ist also $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f_m, so ist z^m eine Nullstelle von $\Phi(X)$ und damit eine primitive 3-te Einheitswurzel. Insbesondere ist also $z^{3m} = (z^m)^3 = 1$ und z selbst damit eine $3m$-te Einheitswurzel.
Zu b). Nehmen wir zuerst $m = 3^k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ an. Die Nullstellen von f_m sind nach a) dann 3^{k+1}-te Einheitswurzeln, und eine solche 3^{k+1}-te Einheitswurzel ist genau dann Nullstelle von f_m, wenn z^{3^k} eine primitive 3-te Einheitswurzel ist. Insbesondere ist also jede primitive 3^{k+1}-te Einheitswurzel offensichtlich Nullstelle von f_m. Da es gerade $\phi(3^{k+1}) = 3^{k+1} - 3^k = 2 \cdot 3^k = 2m = \deg(f_m)$ solche primitiven Einheitswurzeln gibt (mit ϕ der Eulerschen Phi-Funktion), erhalten wir $f_m = \Phi_{3^{k+1}}$ (mit Φ_n dem n-ten Kreisteilungspolynom), womit f_m irreduzibel ist.
Für die umgekehrte Richtung nehmen wir an, dass m nicht von der Form 3^k ist, das heißt, $m = 3^k \cdot a$ für ein $1 < a \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(a, 3) = 1$. Dann können wir schreiben

$$f_m(X) = X^{2 \cdot 3^k \cdot a} + X^{3^k \cdot a} + 1 = (X^a)^{2 \cdot 3^k} + (X^a)^{3^k} + 1.$$

Nach den obigen Überlegungen wissen wir, dass das Polynom $X^{2\cdot 3^k} + X^{3^k} + 1$ irreduzibel ist und seine Nullstellen gerade die primitiven 3^{k+1}-ten Einheitswurzeln sind. Somit ist ein $z \in \mathbb{C}$ in diesem Fall genau dann eine Nullstelle von f_m, wenn z^a eine primitive 3^{k+1}-te Einheitswurzel ist. Da $\mathrm{ggT}(a, 3^{k+1}) = 1$ gilt, ist allerdings die Abbildung $(\bullet)^a$ eine Bijektion auf der Menge der primitiven 3^{k+1}-ten Einheitswurzeln, mit Umkehrabbildung $(\bullet)^b$, für b das multiplikative Inverse zu a in $\mathbb{Z}_{3^{k+1}}$ – das heißt, insbesondere sind also die 3^{k+1}-ten Einheitswurzeln Nullstellen von f_m. Somit wissen wir, dass das Polynom $\Phi_{3^{k+1}}(X) = X^{2 \cdot 3^k} + X^{3^k} + 1$ ein echter Teiler von f_m und f_m damit nicht irreduzibel ist.