H10-T2-A3

Die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(G)$ einer Gruppe G sei zyklisch. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

Lösungsvorschlag. Betrachte den Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \phi\colon G &\to \mathrm{Aut}(G) \\ g &\mapsto (\phi_g\colon h \mapsto ghg^{-1}) \end{aligned}$$

Es ist $\ker\phi = Z(G)$. Somit ist nach dem Homomorphiesatz $G/Z(G)$ isomorph zu einer Untergruppe von $\mathrm{Aut}(G)$ und damit selbst zyklisch, womit wir wissen, dass G abelsch ist.

Beweis der "Aussage $G/Z(G)$ zyklisch $\Rightarrow$ G abelsch" Es sei $G/Z(G) = \langle gZ(G)\rangle$ für eine Nebenklasse $gZ(G)$. Seien $x, y \in G$ beliebig, dann ist also $xZ(G) = g^iZ(G)$ und $yZ(G) = g^jZ(G)$. Also $x = g^iz$ und $y = g^jz'$ für gewisse $z, z' \in Z(G)$ und $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Damit erhalten wir

$$xy = g^izg^jz' = g^ig^jzz' = g^{i+j}zz' = g^{j+i}z'z = g^jg^iz'z = g^jz'g^iz = yx,$$

wobei wir verwendet haben, dass z, z' im Zentrum liegen und daher mit allen Elementen aus G kommutieren.