H10-T2-A2

Eine echte Untergruppe U einer Gruppe G heißt maximal, wenn G die einzige Untergruppe von G ist, die U echt enthält.
Zeigen Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 4$: Jede maximale Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n hat eine Ordnung $\geq n$.
(Tipp: Man unterscheide die Fälle,in denen eine maximale Untergruppe von S_n transitiv bzw. nicht transitiv operiert.)

Lösungsvorschlag. Wirkt U transitiv, so existiert eine einzige Bahn der Länge n und es folgt $n||U|$ (die Bahnlänge ist ein Teiler der Gruppenordnung).

Wirkt U nicht transitiv, dann sei r die Länge der längsten Bahn der Wirkung von U. Bezeichnen wir die längste Bahn mit $B \subset \{1, \ldots, n\}$, so sind die Teilmengen B und $\{1, \ldots, n\} \backslash B$ invariant unter der Wirkung von U (da die Zerlegung in Bahnen bekanntlich disjunkt ist). Somit ist U eine Untergruppe von $S_r \times S_{n-r} \subset S_n$, und aufgrund der Maximalität von U folgt $U = S_r \times S_{n-r}$ mit

$$|S_r \times S_{n-r}| = r! \cdot (n-r)! \geq n$$

für $n \geq 4$ folgt das Ergebnis.