H10-T2-A1

Für welche natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt $x^2 = 1$ für alle Elemente x in der Einheitengruppe des Restklassenringes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

(6 Punkte)

Lösungsvorschlag. Sei $n = p_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{r_n}$ die Primfaktorzerlegung von n. Nenne zur Abkürzung $a_i := p_i^{r_i}$. Dann ist nach dem chinesischen Restsatz der kanonische Morphismus

$$\pi \colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{a_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{a_n}$$

ein Isomorphismus von Ringen, der also insbesondere Einheiten auf Einheiten abbildet. Da die Multiplikation auf der rechten Seite Komponentenweise ausgeführt wird (also mit $\pi(x) = (x_1, \ldots, x_n)$ genauer $x^2 = 1 \Leftrightarrow \pi(x)^2 = (1, \ldots, 1) \quad \Leftrightarrow \quad (x_1^2, \ldots, x_n^2) = (1, \ldots, 1) \quad \Leftrightarrow \quad x_i^2 = 1 \ \forall\ i \in \{1, \ldots, n\}$) können wir also äquivalent untersuchen, für welche Primzahlpotenzen p^r die Bedingung

$$x^2 = 1 \ \forall\ x \in \mathbb{Z}_{p^r}^\times \tag{1}$$

gilt. Hierzu stellen wir eine Fallunterscheidung an:

- $p \geq 5$: In diesem Fall ist $2 \in \mathbb{Z}_{p^r}^\times$ und $2^2 = 4 \not\equiv 1 \mod p^r$.
- $p = 3$: Hier müssen wir nach den möglichen Werten von r weiter unterscheiden: Für $r \geq 2$ ist wiederum $2^2 = 4 \not\equiv 1 \mod 3^r$. Für $r = 1$ hingegen ist die $\mathbb{Z}_3^\times = \{1, 2\}$ und $1^2 = 1 \equiv 2^2 \mod 3$.
- $p = 2$: Für $r \geq 4$ ist $3^2 = 9 \not\equiv 1 \mod 2^r$. Für $r = 3$ haben wir $\mathbb{Z}_8^\times = \{1, 3, 5, 7\}$ und $1^2 = 1 \equiv 3^3 \equiv 5^2 \equiv 7^2 \mod 8$. Für $r = 2$ erhalten wir $\mathbb{Z}_4^\times = \{1, 3\}$ und $1^2 = 1 \equiv 3^2 \mod 4$. Für $r = 1$ ist nichts zu zeigen.

Unserer Vorüberlegung zufolge gilt die Bedingung (1) also für alle $n = 2^{r_1} \cdot 3^{r_2}$, mit $r_1 \in \{0, 1, 2, 3\}$, $r_2 \in \{0, 1\}$, wobei der Fall $r_1 = 0 = r_2$ ausgeschlossen sein soll, also $n = 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$.