H10-T1-A5

Sei $k \subset K$ eine Körpererweiterung und $0 \neq \alpha \ni K$ mit $K = k[\alpha]$. Weiter sei eine Potenz α^e (e eine positive ganze Zahl) von α in k enthalten. Sei n die minimale positive ganze Zahl, so dass α^n in k ist. Zeigen Sie:

a) Ist $\alpha^m \in k$ für ein $m > 0$, so ist m ein Vielfaches von n.

b) Ist K/k eine separable Erweiterung, so ist die Charakteristik von k kein Teiler von n.

Lösungsvorschlag. Zu a). Ist $\alpha^m \in k$, so muss in jedem Fall gelten $m \geq n$, aufgrund der Minimalität von n. Wir können also m mit Rest durch n teilen, d. h. wir finden $r, q \in \mathbb{N}$, mit $r < n$ und $m = qn + r$. Es gilt dann also

$$k \ni \alpha^m = \alpha^{qn+r} = (\alpha^n)^q \cdot \alpha^r,$$

also

$$\alpha^r = \underbrace{\alpha^m}_{\in k} \cdot (\underbrace{\alpha^n}_{\in k})^{-q} \in k,$$

was aber $r = 0$ impliziert, wiederum aufgrund der Minimalität von n. Somit gilt $n | m$.

Zu b). Ist die Charakteristik $p := \mathrm{char}(k)$ von k ein Teiler von n, also $n = mp^i$ für $i \in \mathbb{N}$ so, dass p nicht m teilt und ein $m \in \mathbb{N}$, so betrachten wir das Element $\alpha^m \in K \setminus k$. Nach Voraussetzung ist α^m eine Nullstelle von $X^{p^i} - \alpha^n \in k[X]$. Nun ist aber

$$X^{p^i} - \alpha^n = X^{p^i} - (\alpha^m)^{p^i} = (X - \alpha^m)^{p^i} \in K[X],$$

somit kann kein Teiler von Grad > 1 von $X^{p^i} - \alpha^n$ separabel sein, insbesondere das Minimalpolynom von α^m über k nicht. Somit ist $\alpha^m \in K$ ein über k nicht separables Element, zusammengefasst haben wir also gezeigt:

$$\mathrm{char}(k) | n \quad \Rightarrow \quad k \subset K \text{ nicht separabel},$$

oder eben äquivalent

$$k \subset K \text{ separabel} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{char}(k) \text{ teilt nicht } n.$$