H10-T1-A4

Sei R ein Integritätsbereich und $R[X]$ der Polynomring über R. Für $r \in R$ sei $\phi_r \colon R[X] \to R,\ f \mapsto f(r)$ der Einsetzungshomomorphismus. Zeigen Sie:

a) Ist $I \subsetneq \mathbb{C}[X]$ ein Ideal, so gibt es ein $r \in \mathbb{C}$, so dass $\phi_r(I) = 0$.

b) Sei I das von 3 und $X^2 + 1$ erzeugte Ideal in $\mathbb{Z}[X]$. Dann ist $I \subsetneq \mathbb{Z}[X]$ und $\phi_r(I) = \mathbb{Z}$ für alle $r \in \mathbb{Z}$.

Lösungsvorschlag. Zu a). Da $\mathbb{C}[X]$ ein Hauptidealbereich ist, ist also $I = (f)$ für ein $f \in \mathbb{C}[X]$. Ist $f = 0$ ist der Fall klar. Andernfalls kann f wegen $I \neq \mathbb{C}[X]$ nicht konstant sein und hat somit mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$. Nennen wir diese r, so gilt nach Konstruktion für ein beliebiges $g \in I$: $g = hf$ für ein $h \in \mathbb{C}[X]$ wegen $I = (f)$, also $g(r) = h(r)f(r) = 0$ und damit $\phi_r(I) = 0$ wie gewünscht.
Zu b). Die Tatsache $I \neq \mathbb{Z}[X]$ ist aus Grad-Gründen klar: Beispielsweise ist $1 \notin I$, da die Gleichung

$$1 = a \cdot 3 + b \cdot (X^2 + 1)$$

mit $a, b \in \mathbb{Z}[X]$ nach einem Koeffizientenvergleich auf den Widerspruch $1 = a_0 \cdot 3$ mit $a_0 \in \mathbb{Z}$ führen würde. Wir wollen noch zeigen, dass $1 \in \phi_r(I)$ für ein beliebiges $r \in \mathbb{Z}$ (denn damit wäre $\phi_r(I) = \mathbb{Z}$ gezeigt). Dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathrm{ggT}(3, r^2+1) = 1$ ist, oder – äquivalent, da 3 prim ist – 3 nicht $r^2 + 1$ teilt. Wir beobachten aber, dass dies in der Tat für alle $r \in \mathbb{Z}$ der Fall ist, da die Gleichung

$$X^2 + 1 = 0 \mod 3 \quad \Leftrightarrow \quad X^2 = 2 \mod 3$$

keine Lösung in $\mathbb{Z}_3$ besitzt.