H10-T1-A2

Sei G eine Gruppe mit $|G| = 595 = 5 \cdot 7 \cdot 17$ und $H \leq G$ eine Untergruppe mit $|H| = 5$. Zeigen Sie:

a) H ist ein Normalteiler von G.

b) H liegt im Zentrum von G.

Lösungsvorschlag. Zu a). Wegen $|H| = 5$ ist H eine 5-Sylowgruppe. Nach dem dritten Sylowsatz gilt für die Anzahl s_5 der 5-Sylowgruppen $s_5 \equiv 1 \mod 5$ und $s_5 | 7 \cdot 17$. Wegen $7 \not\equiv 1, -1 \not\equiv 17 \mod 5$ folgt also $s_5 = 1$, nach dem zweiten Sylowsatz ist also H ein Normalteiler.

Zu b). Wir betrachten den Morphismus $\varphi\colon G \to S_5$, der durch die Gruppenwirkung

$$\begin{aligned} G \times H &\to H \\ (g, h) &\mapsto ghg^{-1} \end{aligned}$$

gegeben ist. Offensichtlich liegt H im Kern dieses Morphismus': Für $g \in H$ ist $ghg^{-1} = hgg^{-1} = h$ für alle $h \in H$, da H wegen $|H| = 5$ zyklisch, insbesondere abelsch ist. Damit folgt $|G/\ker(\varphi)| \mid 7 \cdot 17$. Nach dem Homomorphiesatz ist aber $\operatorname{Im}(\varphi) \simeq G/\ker(\varphi)$, also folgt — da ja $|\operatorname{Im}(\varphi)|$ auch $|S_5| = 5!$ teilen muss und $\operatorname{ggT}(5!, 7 \cdot 17) = 1$ ist — dass $|\operatorname{Im}(\varphi)| = 1$, also $\operatorname{Im}(\varphi) = \{\operatorname{Id}\}$, was wiederum bedeutet, dass $ghg^{-1} = h$ gilt für alle $g \in G$, $h \in H$, womit $H \subset Z(G)$ gezeigt ist wie gewünscht.