H10-T1-A1

Sei S_3 die symmetrische Gruppe und G eine Gruppe mit einer normalen Untergruppe N der Ordnung 5, so dass $G/N \simeq S_3$ ist. Zeigen Sie:

a) $|G| = 30$.

b) G hat eine normale Untergruppe der Ordnung 15.

c) G besitzt mindestens drei Untergruppen der Ordnung 10, die nicht normal sind.

Lösungsvorschlag. Zu a). $|G| = |N| \cdot |G/N| = 5 \cdot |S_3| = 30$.
Zu b). Wir identifizieren im Folgenden G/N mit S_3 durch den in der Angabe vorgegebenen Isomorphismus. Es ist $A_3 \subset S_3 \simeq G/N$ ein Normalteiler der Ordnung 3. Nach dem Korrespondenzsatz entspricht dieser einem Normalteiler $P \subset G$, so dass $N \subset P$ und $P/N \simeq A_3$. Insbesondere ist also $|P| = |P/N| \cdot |N| = 3 \cdot 5 = 15$.
Zu c). Nach dem Korrespondenzsatz entsprechend die drei nicht-Normalteiler $\langle(1,2)\rangle$, $\langle(1,3)\rangle$ und $\langle(2,3)\rangle$ drei nicht-Normalteilern[1] P_1, P_2 und P_3 mit $|P_1| = |P_1/N| \cdot |N| = |\langle(1,2)\rangle| \cdot 5 = 10$ und analog für P_2, P_3.

[1] Eine Untergruppe $H \subset G$ mit $N \subset H$ ist genau dann ein Normalteiler in G, wenn H/N Normalteiler in G/N ist.