## F18-T3-A5

Es sei $K = \mathbb{Q}(i) \subset \mathbb{C}$ und $\alpha := \sqrt[4]{7} \in \mathbb{R}$. Sei $L \subset \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper des Polynoms $f := X^4 - 7 \in K[X]$ über dem Grundkörper $K$.

a) Zeigen Sie, dass $L = K(\alpha)$ gilt.

b) Bestimmen Sie die Grade der Körpererweiterungen $[L : \mathbb{Q}]$ und $[L : K]$ und begründen Sie ihre Antworten.

c) Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $L/K$ Galoissch ist.

d) Es sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(L|K)$ mit $\sigma(\alpha) = i\alpha$. Bestimmen Sie $\sigma^2(\alpha)$ und folgern Sie, dass $\mathrm{Gal}(L|K) = \langle \sigma \rangle$ gilt.

*Lösungsvorschlag.* Zu a). Nach Voraussetzung ist

$$L = \mathrm{Zerf}_K(f) = K(\alpha, i\alpha) = \mathbb{Q}(i, \alpha) = K(\alpha).$$

Zu b). Wegen $i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}(\alpha) \subset \mathbb{R}$ ist $[L : \mathbb{Q}(\alpha)] \geq 2$, da $i$ Nullstelle von $X^2 + 1 \in \mathbb{Q}(X) \subset \mathbb{Q}(\alpha)[X]$ ist, folgt $[L : \mathbb{Q}(\alpha)] = 2$. Da $f \in \mathbb{Q}[X]$ normiert und irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist nach dem Lemma von Gauß und dem Eisensteinkriterium für die Primzahl 7, ist außerdem $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \deg(f) = 4$, und damit nach der Gradformel

$$[L : \mathbb{Q}] = [L : \mathbb{Q}(\alpha)] \cdot [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 4 = 8.$$

Ebenso erhalten wir damit $8 = [L : \mathbb{Q}] = [L : K] \cdot [K : \mathbb{Q}] = [L : K] \cdot 2$, also $[L : K] = 4$.
Zu c). Da $f$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist, ist $f$ insbesondere separabel. Somit ist $K \subset L$ als Zefällungskörper eines separablen Polynomes sowohl normal (als Zerfällungskörper $\mathrm{Zerf}_K(f)$) als auch separabel (da $f$ separabel), also Galoissch.
Zu d). Sei also $\mathrm{Id} \neq \sigma \in \mathrm{Gal}(L|K)$ mit $\sigma(\alpha) = i\alpha$. Dann gilt

$$\sigma^2(\alpha) = \sigma(i\alpha) = \sigma(i)\sigma(\alpha) = i\sigma(\alpha) = i^2\alpha = -\alpha.$$

Hier haben wir verwendet, dass $\sigma \in \mathrm{Gal}(L|K)$ vorausgesetzt war, also $\sigma|_K = \mathrm{Id}_K$, also $\sigma(i) = i$. Mit Hilfe von Teil b) und c) wissen wir

$$|\mathrm{Gal}(L|K)| = [L : K] = 4,$$

also $\mathrm{ord}(\sigma)|4$. Mit $\sigma^2(\alpha) = -\alpha \neq \alpha$ haben wir aber bereits $\sigma^2 \neq \mathrm{Id}$ gezeigt, also $\mathrm{ord}(\sigma) = 4$, also $\mathrm{Gal}(L|K) = \langle \sigma \rangle$.