## F18-T3-A3

Für eine endliche Gruppe $G$ und eine Primzahl $p$, die die Ordnung von $G$ teilt, bezeichnen wir mit $n_p$ die Anzahl der $p$-Sylowgruppen in $G$.

a) Es seien $G$ eine endliche Gruppe und $p, q \in \mathbb{N}$ zwei verschiedene Primzahlen, die die Ordnung von $G$ teilen. Angenommen, $n_p = n_q = 1$. Es seien $H_1$ die einzige $p$-Sylowgruppe und $H_2$ die einzige $q$-Sylowgrupp in $G$.
Zeigen Sie, dass die Elemente von $H_1$ und $H_2$ miteinander kommutieren, d. h. für alle $x \in H_1$ und für alle $y \in H_2$ gilt $xy = yx$.

b) Es sei $G$ eine Gruppe der Ordnung 12.
   i) Zeigen Sie, dass nicht gleichzeitig $n_2 = 3$ und $n_3 = 4$ gelten kann.
   ii) Zeigen Sie, dass im Fall $n_2 = n_3 = 1$ die Gruppe $G$ abelsch ist und es bis auf Isomorphie genau zwei verschiedene Möglichkeiten für $G$ gibt.

*Lösungsvorschlag.* Zu a). Seien $x \in H_1$, $y \in H_2$ beliebig. Wir wollen zeigen, dass $xy = yx$ gilt. Dies ist offensichtlich äquivalent zu $xyx^{-1}y^{-1} = 1 \in G$. Als einzige $p$- bzw. $q$-Sylowgruppen sind $H_1$ und $H_2$ bekanntlich Normalteiler in $G$. Das impliziert aber insbesondere $xyx^{-1} = \tilde{y} \in H_2$, also $xyx^{-1}y^{-1} = \tilde{y}y^{-1} \in H_2$ und ebenso $yx^{-1}y^{-1} = \tilde{x} \in H_1$, also $xyx^{-1}y^{-1} = x\tilde{x} \in H_1$. Somit haben wir gezeigt

$$xyx^{-1}y^{-1} \in H_1 \cap H_2 = \{1\},$$

wobei wir für $H_1 \cap H_2 = \{1\}$ verwendet haben, dass $p$ und $q$ verschiedene Primzahlen sind und $|H_1| = p^{n_1}$ für ein $n_1 \in \mathbb{N}$ und $|H_2| = q^{n_2}$ für ein $n_2 \in \mathbb{N}$. Denn da $H_1 \cap H_2$ eine Untergruppe sowohl von $H_1$ als auch von $H_2$ ist, muss nach dem Satz von Lagrange ja gelten $|H_1 \cap H_2|$ teilt $p^{n_1}$ und $|H_1 \cap H_2|$ teilt $q^{n_2}$, also $|H_1 \cap H_2|$ teilt $\mathrm{ggT}(p^{n_1}, q^{n_2}) = 1$, also $|H_1 \cap H_2| = 1$.
Zu b), i). Angenommen, es wäre $n_3 = 4$. Seien dann $P_1, \ldots, P_4$ die vier 3-Sylowgruppen in $G$. Wegen $|P_i| = 3$ prim gilt $P_i \cap P_j = \{1\}$ für alle $i \neq j$. Die vier 3-Sylowgruppen enthalten zusammen also $4 \cdot 2 = 8$ Elemente der Ordnung 3. Da 3 kein Teiler von 4 ist, können diese natürlich nicht Elemente einer 2-Sylowgruppe von $G$ sein. Somit stehen für die Gesamtheit der 2-Sylowgruppen in $G$ noch die verbleibenden $12 - 8 = 4$ Elemente zur Verfügung. Dies entspricht genau einer möglichen 2-Sylowgruppe, also folgt $n_2 = 1$.
Zu b), ii). Sei nun $n_2 = n_3 = 1$. Seien $H_1$ die einzige 2- und $H_2$ die einzige 3-Sylowgruppe in $G$. Als Gruppen der Ordnung 4 bzw. 3 sind $H_1$ und $H_2$ abelsch, und nach Teil a) wissen wir, dass für beliebige $x \in H_1$, $y \in H_2$ gilt: $xy = yx$. Somit ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi\colon H_1 \times H_2 &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto gh \end{aligned}$$

ein wohldefinierter Gruppenmorphismus, und es gilt $\varphi((g, h)) = 1$ genau dann, wenn $gh = 1$ gilt, also $g = h^{-1}$, was aber nur genau dann der Fall ist, wenn $g = h = 1$ ist, denn $g = h^{-1}$ impliziert ja $g \in H_2$, also $g \in H_1 \cap H_2 = \{1\}$. Damit ist $\varphi$ also injektiv, wegen $|H_1 \times H_2| = |H_1| \cdot |H_2| = 12 = |G|$ aber damit auch schon surjektiv und damit ein Isomorphismus, was zeigt dass $G$ abelsch ist (da $H_1$ und $H_2$ wie schon begründet abelsch sind und damit natürlich auch ihr direktes Produkt). Nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen sind die beiden einzigen Möglichkeiten für eine solche Gruppe also $G \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$ und $G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ (dass es sich hierbei um verschiedene Isomorphietypen handelt, ist beispielsweise schnell damit zu begründen, dass die erste Variante ein Element der Ordnung 4 enthält, die zweite aber nicht).