F18-T3-A2

In der Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ der invertierbaren Matrizen über $\mathbb{Q}$ wähle $a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass a und b endliche Ordnungen haben, und bestimmen Sie diese Ordnungen.

b) Zeigen Sie, dass $c = ab$ keine endliche Ordnung hat.

Lösungsvorschlag. Zu a). Es ist

$$a^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\operatorname{Id}$$

und damit $\operatorname{ord}(a) = 4$. Weiter ist

$$b^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\operatorname{Id}$$

und damit $\operatorname{ord}(b) = 6$.
Zu b). Wir berechnen

$$ab = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$(ab)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert uns die Idee für die Behauptung

$$(ab)^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

die wir durch Induktion über n beweisen wollen. Der Induktionsanfang ist bereits gemacht, wie nehmen an, dass (1) für alle $n' \leq n$ gilt. Dann erhalten wir

$$(ab)^{n+1} = (ab)^n(ab) \overset{\text{I.V.}}{=} \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -(n+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist $(ab)^n \neq \operatorname{Id}$ für alle $n \geq 1$, so dass $\operatorname{ord}(ab) = \infty$ gezeigt ist.