F18-T2-A5

Das Zentrum einer (multiplikativ geschriebenen) Gruppe G ist die Untergruppe

$$Z(G) = \{z \in G | \forall g \in G \colon gz = zg\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $Z(G)$ ein Normalteiler in G ist.

b) Sei D die Diedergruppe der Ordnung 12. Bestimmen Sie $Z(D)$.

c) Bestimmen Sie die Struktur der Faktorgruppe $D/Z(D)$.

Lösungsvorschlag. Zu a). Zu zeigen ist also: $\forall g \in G \colon gZ(G)g^{-1} = Z(G)$. Da für alle $g \in G$ die Abbildung $g(\bullet)g^{-1} \colon G \to G$ bijektiv ist, genügt es dabei offenbar, die Inklusion "$\subset$" zu zeigen. Seien dazu $g \in G$ und $z \in Z(G)$ beliebig. Dann gilt $gzg^{-1} = gg^{-1}z = z \in Z(G)$.
Zu b). Bekanntlich ist

$$D_6 = \langle \sigma, \tau | \operatorname{ord}(\sigma) = 6,\ \operatorname{ord}(\tau) = 2,\ \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle.$$

Insbesondere lässt sich also jedes Element von $D = D_6$ in der Form $\tau^i\sigma^j$ schreiben, mit $i \in \{0, 1\}$, $j \in \{0, 5\}$. Ein solches $x = \tau^i\sigma^j$ ist offenbar genau dann in $Z(D_6)$, wenn x mit den Erzeugern τ und σ von D_6 kommutiert, wenn also gilt $\tau x = x\tau$ und $\sigma x = x\sigma$. Daher berechnen wir:

- $$\begin{aligned} \tau(\tau^i\sigma^j) = (\tau^i\sigma^j)\tau &\overset{\tau^i\cdot(\bullet)}{\iff} \tau\sigma^j = \sigma^j\tau \\ &\overset{(\bullet)\cdot\tau}{\iff} \sigma^{-j} = \tau\sigma^j\tau = \sigma^j \\ &\iff \sigma^{2j} = 1 \overset{\operatorname{ord}(\sigma)=6}{\iff} 2j = 0 \mod 6. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \sigma(\tau^i\sigma^j) = (\tau^i\sigma^j)\sigma &\overset{(\bullet)\cdot\sigma^{-j}}{\iff} \sigma\tau^i = \tau^i\sigma \\ &\overset{\tau^i\cdot(\bullet)}{\iff} \sigma = \tau^i\sigma\tau^i \\ &\iff i = 0. \end{aligned}$$

Somit haben wir erhalten $Z(D_6) = \langle \sigma^3 \rangle = \{\mathrm{Id}, \sigma^3\}$.
Zu c). Es gilt $|D/Z(D)| = |D|/|Z(D)| = 12/2 = 6$. Die in potentiellen Isomorphietypen von $D/Z(D)$ sind also $\mathbb{Z}_6$ und S_3. Es genügt somit bereits, zu zeigen, dass $D/Z(D)$ nicht abelsch ist, was aber klar, ist da für eine beliebige Gruppe G direkt nach den entsprechenden Definitionen gilt $Z(G/Z(G)) = \{[1]\}$. Explizit können wir aber auch einfach nachrechnen:

$$[\tau][\sigma][\tau]^{-1} = [\tau\sigma\tau] = [\sigma^{-1}] \neq [\sigma],$$

wobei die letzte Ungleichheit gelten muss, da $[\sigma^{-1}] = [\sigma]$ zu dem Widerspruch $\sigma^2 \in Z(D)$ führt. Also $D/Z(D) \simeq S_3$.