F18-T2-A3

Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die der Faktorring $R = \mathbb{R}[X]/(X^2 - a)$

a) ein Integritätsbereich ist;

b) ein Körper ist;

c) isomorph zum Produktring $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist.

Lösungsvorschlag. Wir unterscheiden drei Fälle:

- $a > 0$. In diesem Fall existiert $b := \sqrt{a} \in \mathbb{R}$ mit $b^2 = a$, also

  $$X^2 - a = X^2 - b^2 = (X - b)(X + b).$$

  Mit $\mathrm{ggT}(X - b, X + b) = 1$ liefert der chinesische Restsatz bekanntlich einen Isomorphismus

  $$R = \mathbb{R}[X]/(X^2 - a) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}[X]/(X - b) \times \mathbb{R}[X]/(X + b) \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

  (die Isomorphie $\mathbb{R}[X]/(X - b) \simeq \mathbb{R}$ ist durch $[f(X)] \mapsto f(b)$ gegeben). In diesem Fall trifft also c) zu.

- $a = 0$. Hier ist $R = \mathbb{R}[X]/(X^2 - a) = \mathbb{R}[X]/(X^2)$ kein Integritätsbereich, da beispielsweise $[X] \neq [0]$, aber $[X]^2 = [X^2] = [0]$ in R. Insbesondere ist R in diesem Fall also auch kein Körper. Andererseits kann auch kein Isomorphismus $R \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ existieren: Um dies zu zeigen, betrachten wir die Ideale beider Ringe. In $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gibt es die vier Ideale $\{0\} \times \{0\}$, $\{0\} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times \{0\}$ und $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Wir behaupten, dass es in R dagegen nur die drei Ideale $([0])$, $([X])$ und R gibt. Nach dem Korrespondenzsatz für Ideale wissen ja nämlich, dass

  $$\begin{aligned} \{J \subset R \text{ Ideal}\} &\longleftrightarrow \{I \subset \mathbb{R}[X] \text{ Ideal } | (X^2) \subset I\} \\ J &\longmapsto \pi^{-1}(J) \\ \pi(I) &\longleftarrow I \end{aligned}$$

  eine Bijektion ist, wobei $\pi \colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]/(X^2) = R$ die kanonische Projektion ist. Nun ist aber $\mathbb{R}[X]$ ein Hauptidealbereich und ein Ideal $(f) \subset \mathbb{R}[X]$ hat die Eigenschaft $(X^2) \subset (f)$ definitionsgemäß genau dann, wenn f ein Teiler von X^2 ist. Die einzigen Möglichkeiten hierfür (bis auf Einheiten natürlich) sind $f = X^2$, $f = X$ oder $f = 1$, somit sind die einzigen Ideale in R in der Tat gerade $\pi((X^2)) = ([0])$, $\pi(X) = ([X])$ und $\pi(\mathbb{R}[X]) = R$. Somit kann es keinen Isomorphismus $R \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ geben, da dieser insbesondere ja die Ideale beider Ringe bijektiv miteinander identifizieren würde. In diesem Fall trifft also keine der drei Aussagen a), b), oder c) zu.

- $a < 0$. In diesem Fall hat das Polynom $X^2 - a$ keine Nullstelle in $\mathbb{R}$, ist also irreduzibel in $\mathbb{R}[X]$. Da $\mathbb{R}[X]$ ein Hauptidealbereich ist, ist $(X^2 - a) \subset \mathbb{R}[X]$ damit bereits ein maximales Ideal, womit $R = \mathbb{R}[X]/(X^2 - a)$ ein Körper ist (insbesondere also auch ein Integritätsbereich). In diesem Fall treffen also a) und b) zu.

Bemerkung: Bekanntlich ist $\mathbb{R}[X]/(f)$ genau dann ein Körper, wenn $(f) \subset \mathbb{R}[X]$ ein maximales Ideal ist. Da $\mathbb{R}[X]$ ein Hauptidealbereich ist, ist ein Ideal $(f) \subset \mathbb{R}[X]$ genau dann maximal wenn es ein Primideal ist, was wiederum genau dann der Fall ist, wenn $\mathbb{R}[X]/(f)$ ein Integritätsbereich ist. Die Bedingungen a) und b) der obigen Aufgabe sind also in jedem Fall äquivalent. Gleichzeitig ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ offensichtlich kein Integritätsbereich, so dass sich a) (bzw. b)) und c) wechselseitig ausschließen.