F18-T2-A2

Sei $a \in \mathbb{Z}$ und $f(X) = X^3 + aX^2 - (3+a)X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Zeigen Sie: f ist irreduzibel.

b) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $f(\alpha) = 0$. Zeigen Sie, dass $f(1/(1-\alpha)) = 0$ ist.

c) Zeigen Sie: $\mathbb{Q}(\alpha)$ ist eine galoissche Erweiterung von $\mathbb{Q}$.

Lösungsvorschlag. Zu a). Nach Teil c) von Aufgabe 1 ist bereits bekannt, dass f keine Nullstellen in $\mathbb{Q}$ besitzt. Als Polynom von Grad 3 ist f damit bereits irreduzibel über $\mathbb{Q}$. Zu b). Wir setzen $\beta := 1/(1-\alpha)$ und berechnen

$$\begin{aligned}(1-\alpha)^3 \cdot f(\beta) &= (1-\alpha)^3(\beta^3 + a\beta^2 - (3+a)\beta + 1)\\ &= 1 + (1-\alpha)a - (1-\alpha)^2(3+a) + (1-\alpha)^3\\ &= -\alpha^3 + (3-3-a)\alpha^2 + (-a+2(3+a)-3)\alpha + 1 + a - 3 - a + 1\\ &= -\alpha^3 - a\alpha^2 + (3+a)\alpha - 1 = -f(\alpha) = 0\end{aligned}$$

Zu c). Offenbar ist $\beta = 1/(1-\alpha) \neq \alpha$, denn sonst wäre ja $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$, im Widerspruch zu $f(\alpha) = 0$ und f irreduzibel über $\mathbb{Q}$ (was ja implizieren würde, dass f ein Teiler von $X^2 - X - 1$ wäre), und $\deg(f) = 3 > 2 = \deg(X^2 - X - 1)$. Ist $\gamma \in \mathbb{C}$ die dritte Nullstelle von f, so folgt aus einem Koeffizientenvergleich in

$$f(X) = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) = X^3 + aX^2 - (3+a)X + 1,$$

dass gelten muss $-(\alpha + \beta + \gamma) = a$, also

$$\gamma = -a - \alpha - \beta = -a - \alpha - \frac{1}{1-\alpha} \in \mathbb{Q}(\alpha),$$

womit $\mathbb{Q}(\alpha)$ der Zerfällungskörper des (separablen) Polynomes $f \in \mathbb{Q}[X]$ über $\mathbb{Q}$ ist, also $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathrm{Zerf}_{\mathbb{Q}}(f)$. Insbesondere ist damit $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha)$ normal und separabel, also eine Galoiserweiterung.