F18-T1-A4

Gegeben sei das Polynom $P(X) = X^5 - 4X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Weiter sei $Z \subseteq \mathbb{C}$ ein Zerfällungskörper von P über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

a) P ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

b) P hat genau drei reelle Nullstellen.

c) Die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(Z|\mathbb{Q})$ enthält ein Element der Ordnung 5 und ein Element der Ordnung 2.

Lösungsvorschlag. Zu a). P ist normiert, insbesondere primitiv und irreduzibel über $\mathbb{Q}$ nach dem Lemma von Gauß und dem Eisensteinkriterium für die Primzahl 2.
Zu b). Wir berechnen $P'(X) = 5X^4 - 4$. Die Gleichung $P'(X) = 0$ hat offensichtlich nur zwei reelle Lösungen, $x_1 = \sqrt[4]{4/5}$ und $x_2 = -\sqrt[4]{4/5}$. Somit kann P höchstens drei reelle Nullstellen haben. Wir berechnen $P(-2) = -32 + 8 + 2 < 0$, $P(0) = 2 > 0$, $P(1) = 1-4+2 < 0$ und $P(2) = 32-8+2 > 0$, somit hat P nach dem Zwischenwertsatz mindestens drei reelle Nullstellen, womit insgesamt die Existenz von genau drei reellen Nullstellen gezeigt ist.
Zu c). Nach b) hat P zwei Nullstellen $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Wegen $P \in \mathbb{Q}[X]$ gilt für alle $z \in \mathbb{C}$, dass $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$. Insbesondere wirkt also die komplexe Konjugation

$$\sigma \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \overline{z}$$

durch Permutation auf den Nullstellen von P und lässt sich damit zu einem Automorphismus $\sigma|_Z \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(Z) = \mathrm{Gal}(Z|\mathbb{Q})$ einschränken (Äquivalent folgt $\mathrm{Im}(\sigma|_Z) = Z$ direkt aus der Normalität der Erweiterung $\mathbb{Q} \subset Z$). Die Ordnung von $\sigma|_Z$ ist offensichtlich gerade 2. Da P nach i) irreduzibel ist, wissen wir außerdem, dass für eine Nullstelle $\alpha \in \mathbb{C}$ von P gilt: $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \deg(P) = 5$. Nach der Gradformel ist

$$|\mathrm{Gal}(Z|\mathbb{Q})| = [Z : \mathbb{Q}] = [Z : \mathbb{Q}(\alpha)] \cdot [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 5[Z : \mathbb{Q}(\alpha)],$$

also ist 5 ein Teiler von $|\mathrm{Gal}(Z|\mathbb{Q})|$. Damit enthält $\mathrm{Gal}(Z|\mathbb{Q})$ ein Element der Ordnung 5.