F15-T3-A5

Es sei eine Galoiserweiterung E/K mit zyklischer Galoisgruppe gegeben, so dass $[E : K] = p^n$ gilt mit einer Primzahl p und $n \geq 1$. Weiter sei $K \subset F \subset E$ ein Zwischenkörper mit $[F : K] = p^{n-1}$. Zeigen Sie: Jedes Element von $E \setminus F$ ist ein primitives Element von E über K.

Lösungsvorschlag. Eine zyklische Gruppe G der Ordnung p^n besitzt für jedes $i \in \{0, \ldots, n\}$ genau eine Untergruppe N_i der Ordnung p^i (einschließlich der Fälle $N_0 = \{e\}$ und $N_n = G$). Für $i < j$ ist $N_i \subset N_j$. Da eine zyklische Gruppe insbesondere abelsch ist, sind diese Untergruppen trivialerweise Normalteiler. Unter dem Hauptsatz der Galoistheorie überträgt sich dies zu der Aussage, dass es zu jedem solchen i genau eine Zwischenerweiterung $K \subset L_i \subset E$ gibt mit $[E : L_i] = p^i$, und dass $L_j \subset L_i$ für $i < j$. Nun ist $F = L_1$ in dieser Situation, und $K(\alpha) = L_i$ für $i \in \{0, \ldots, n\}$ für jedes $\alpha \in E \setminus F$. Wäre aber nun $i > 0$, so hätten wir $K(\alpha) \subset F$ im Widerspruch zur Voraussetzung, also $i = 0$ und $K(\alpha) = L_0 = E$.