F15-T3-A4

Im Folgenden ist jeweils L/K eine Körpererweiterung und ein Element $\alpha \in L$ gegeben. Bestimmen Sie jeweils das Minimalpolynom von α über dem Grundkörper K (mit Nachweis!).

a) $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{C}$ und $\alpha := \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

b) $K = \mathbb{F}_3$, $L = \overline{\mathbb{F}_3}$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{F}_3$ und α eine Nullstelle von $X^6 + 1$.

c) $K = \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$, $L = \mathbb{Q}(\zeta)$ und $\alpha = \zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive p-te Einheitswurzel, wobei $p \geq 3$ eine Primzahl bezeichne.

Lösungsvorschlag. Zu a). $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ enthält $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ als echte Unterkörper. Da weiter gilt $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}$, folgt $[\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] \geq 4$. Finden wir also ein (normiertes) Polynom f mit $\deg(f) = 4$ und $f(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 0$, so haben wir ein Minimalpolynom gefunden. Wir berechnen:

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3,$$

somit erfüllt $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ die Gleichung

$$\left(\frac{X^2 - 5}{2}\right)^2 = 6.$$

Wir formen dies um zu

$$X^4 - 10X^2 + 25 = 24.$$

Das Minimalpolynom von $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ist also $f(X) := X^4 - 10X + 1$.
Zu b). In $\mathbb{F}_3[X]$ gilt:

$$(X^2 + 1)^3 = X^6 + 3X^4 + 3X^2 + 1 = X^6 + 1$$

Somit ist α in jedem Fall eine Nullstelle von $f(X) := X^2 + 1$ und f ist irreduzibel über $\mathbb{F}_3$, da $\deg(f) = 2$ und $f(a) \neq 0$ für alle $a \in \mathbb{F}_3$.
Zu c). Wir nennen $u := \zeta + \zeta^{-1}$. Dann gilt $\zeta u = \zeta^2 + 1$. Somit ist

$$f(X) := X^2 - uX + 1 \in \mathbb{Q}(u)[X]$$

ein Polynom mit Nullstelle ζ. Da zudem $\mathbb{Q}(u) \subsetneq \mathbb{Q}(\zeta)$ (es ist $\mathbb{Q}(u) \subset \mathbb{R}$, aber $\mathbb{Q}(\zeta) \not\subset \mathbb{R}$), also $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}(u)] \geq 2$, muss $f(X)$ bereits das gesuchte Minimalpolynom von ζ über $\mathbb{Q}(u)$ sein.