F15-T3-A3

Ein Ring R mit Eins heißt *idempotent*, wenn $a \cdot a = a$ für alle $a \in R$ gilt. Beweisen Sie:

a) $-1 = 1$ in R.

b) Jeder idempotente Ring ist kommutativ.

c) Jeder idempotente Integritätsbereich ist isommorph zu $\mathbb{F}_2$, dem Körper mit 2 Elementen.

Lösungsvorschlag. Zu a). Wir haben $1 = (-1)^2 = -1$. [1]
Zu b). Wir haben

$$a + b = (a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a + ab + ba + b,$$

also (nach Subtraktion von $a + b$ auf beiden Seiten):

$$0 = ab + ba \overset{\text{a)}}{=} ab - ba.$$

Zu c). Sei $a \in R$ beliebig. Dann ist $a(a-1) = a^2 - a = a - a = 0$, und da R ein Integritätsbereich ist folgt also $a = 0$ oder $a = 1$. Also ist R ein Ring mit $|R| = 2$, also $R \simeq \mathbb{F}_2$.

[1]In jedem Ring gilt $(-a)b = -ab$, nach dem Distributivgesetz: $0 = 0 \cdot b = (a-a)b = ab + (-a)b$, insbesondere also $(-1)b = -b$ — dass in der Tat $0 \cdot b = 0$ gilt ist ebenfalls in allen Ringen gültig, wiederum aufgrund des Distributivgesetzes $0b = (0+0)b = 0 \cdot b + 0 \cdot b$ mit anschließender Subtraktion von $0 \cdot b$ auf beiden Seiten.