F15-T3-A2

Seien p, q, r Primzahlen mit $p < q < r$ und $pq < r + 1$. Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung pqr auflösbar ist.

Lösungsvorschlag. Sei G eine Gruppe der Ordnung pqr. Nach den Sylowsätzen gilt für die Anzahl s_r der r-Sylowgruppen von G, dass $s_r \equiv 1 \mod r$ und $r|pq$. Wegen $pq < r+1$ nach Angabe ist also $s_r = 1$, das heißt G besitzt einen Normalteiler P_r der Ordnung r (somit ist P_r zyklisch, insbesondere also abelsch) und G/P_r ist von Ordnung pq.

Somit genügt es für den Rest der Aufgabe, zu zeigen, dass jede Gruppe der Ordnung pq auflösbar ist. Für die Anzahl s_q der q-Sylowgruppen einer solchen Gruppe ergibt sich nach den Sylowsätzen $s_q \equiv 1 \mod q$ und $s_q|p$, also $s_q = 1$ wegen $p < q$ nach Voraussetzung. Somit enthält eine solche Gruppe stets einen Normalteiler der Ordnung q. Die zugehörige Faktorgruppe hat dementsprechend die Ordnung p. Als Gruppen von Primzahlordnung sind also sowohl der Normalteiler als auch die Faktorgruppe abelsch, insbesondere auflösbar, so dass also in der Tat jede Gruppe der Ordnung pq auflösbar ist. Es ist also G/P_r und damit auch G auflösbar.