F15-T2-A4

a) Die Gruppe G operiere transitiv auf einer Menge Ω mit $|\Omega| > 1$. Man zeige: Hat jedes Element aus G mindestens einen Fixpunkt, dann ist G eine Vereinigung der Konjugierten hUh^{-1}, $h \in G$, einer echten Untergruppe U von G.

b) Für $n > 1$ sei $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über den komplexen Zahlen. Man gebe eine echte Untergruppe U von G an, so dass G die Vereinigung der Konjugierten von U ist. (Hinweis: Betrachte die Operation von G auf den 1-dimensionalen Unterräumen von $\mathbb{C}$.)

Lösungsvorschlag. Zu a). Seien $x, y \in \Omega$ beliebig. Da die Gruppenwirkung von G auf Ω transitiv ist, existiert ein $g \in G$ mit der Eigenschaft, dass $y = gx$. Wir behaupten, dass damit für die Standgruppen $G_x = \{g \in G \ : \ gx = x\} \subset G$ und G_y an x bzw. y gilt

$$G_y = gG_xg^{-1}.$$

Sei dazu $h \in G_x$. Es ist $ghg^{-1}y = ghx = gx = y$, also $h \in G_y$. Ist umgekehrt $h \in G_y$, so gilt $h(gx) = hy = y = gx$, also (nach Multiplikation mit g^{-1} auf beiden Seiten) $g^{-1}hg \in G_x$ bzw. äquivalent $h \in gG_xg^{-1}$. Da nach Voraussetzung jedes Element aus G einen Fixpunkt in Ω bezüglich der gegebenen Gruppenwirkung besitzt, gilt $\bigcup_{x\in\Omega} G_x = G$. Wir setzen nun $U := G_x$ für ein beliebiges $x \in \Omega$.

Zu b). Dem Hinweis folgend setzen wir die kanonische Wirkung von $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ auf $\mathbb{C}^n$ fort auf eine Wirkung von G auf der Menge $\Omega := \{\langle v\rangle \ : \ 0 \neq v \in \mathbb{C}^n\}$ der eindimensionalen Unterräume von $\mathbb{C}^n$, durch $M\langle v\rangle := \langle Mv\rangle$ für $M \in G$. Da sämtliche Eigenwerte eines $M \in G$ von 0 verschieden sind, liefert ein beliebiger Eigenvektor v_M zu M einen Fixpunkt $\langle v_M\rangle$ von M in Ω. Da die so definierte Wirkung von G offensichtlich auch transitiv ist (Elemente $M \in G$ entsprechen ja gerade Basiswechseln in $\mathbb{C}^n$) sind damit die Voraussetzungen von Teil a) erfüllt. Jede Untergruppe der Form $U := G_{\langle v\rangle}$ für $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$ erfüllt damit die Anforderung der Aufgabe b).