

F15-T2-A2

Es sei $f(X) \in K[X]$ ein nicht konstantes Polynom ohne mehrfache Nullstellen in einem Zerfällungskörper. Man zeige, dass $f(X)$ ein Teiler des Polynomes $f(X + f(X))$ ist.

Lösungsvorschlag. Da nach Voraussetzung f paarweise Nullstellen (in einem algebraischen Abschluss von K) besitzt, genügt es, zu zeigen, dass jede Nullstelle von f auch eine Nullstelle von $f(X + f(X))$ ist. Das ist aber klar, da für ein a mit $f(a) = 0$ gilt $f(a + f(a)) = f(a) = 0$.

Noch kürzere Lösung ohne die Verwendung der Voraussetzung Es ist

$$f(X + f(X)) \equiv f(X) \equiv 0 \pmod{f(X)}.$$