F15-T2-A1

Man bestimme alle Paare von Primzahlen p, q mit $p^2 - 2q^2 = 1$.

Lösungsvorschlag. Wir betrachten die Gleichung modulo 4. Die Quadrate in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sind $0 = 0^2 = 2^2$ und $1 = 1^2 = 3^2$. Die Annahmen $p^2 = q^2 = 1 \mod 4$ oder $p^2 = 0$, $q^2 = 1$ führen zu den jeweiligen Widersprüchen $-1 \neq 1 \mod 4$ bzw. $-2 \neq 1 \mod 4$. Somit muss also $p^2 = 1 \mod 4$ und $q^2 = 0 \mod 4$ gelten. Die einzige Primzahl, welche die Bedingung für q erfüllt ist $q = 2$. Damit erhalten wir $p^2 = 9$ und somit $p = 3$. Es existiert also nur ein Paar mit der gesuchten Eigenschaft, $p = 3$ und $q = 2$.