F15-T1-A5

Sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad $n \geq 1$. Sei K ein Zerfällungskörper von f. Sei $G = \mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q})$ die zugehörige Galoisgruppe.

a) Beweisen Sie: Falls G eine abelsche Gruppe ist, hat sie Ordnung n.

b) Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$, wobei $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$ ist. Bestimmen Sie ein irreduzibles Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$, dessen Zerfällungskörper K ist. Beweisen Sie, dass $G = \mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q})$ abelsch, aber nicht zyklisch ist.

Lösungsvorschlag. Zu a). Sei also G abelsch. Dann ist jede Untergruppe von G trivialerweise ein Normalteiler und jede Zwischenerweiterung $\mathbb{Q} \subset L \subset K$ ist selbst wieder Galois'sch. Betrachte den Fall $L = \mathbb{Q}(\alpha)$ für α eine beliebige Nullstelle von f. Dann gilt $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = n$ nach Voraussetzung und $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha)$ ist Galois'sch. Insbesondere ist $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha)$ normal und jedes irreduzible Polynom aus $\mathbb{Q}[X]$ mit einer Nullstelle in $\mathbb{Q}(\alpha)$ – wie beispielsweise f – zerfällt über $\mathbb{Q}(\alpha)$ bereits in Linearfaktoren. Somit ist $\mathbb{Q}(\alpha)$ Zerfällungskörper von f und daher $\mathbb{Q}(\alpha) = K$.
Zu b). Wir beobachten, dass offensichtlich $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q}$ gilt. Insbesondere ist also

$$G = \mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})|\mathbb{Q}) \times \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(i)|\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

abelsch, aber nicht zyklisch. Wir wollen nun ein primitives Element $\alpha \in K$ finden, also $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, dann hat das Minimalpolynom $f_\alpha =: f \in \mathbb{Q}[X]$ von α die gewünschte Eigenschaft ($\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f) = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}) = \mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q}) = G$ ist abelsch, aber nicht zyklisch). Wir behaupten, dass $\alpha := \sqrt{2} + i$ ein solches primitives Element ist (vgl. dazu Aufgabe 7 vom Übungsblatt "Körper I"). Dazu überlegen wir uns, dass offensichtlich $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+i) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ gilt und also noch die Inklusion "$\supset$" zu zeigen bleibt. Dazu berechnen wir

$$(\sqrt{2} + i)^3 = 2\sqrt{2} + 3 \cdot 2i + 3 \cdot \sqrt{2}(-1) - i = -\sqrt{2} + 5i,$$

also $\frac{1}{6} \cdot \big((\sqrt{2}+i)^3 + (\sqrt{2}+i)\big) = i$ und somit $i \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+i)$ und damit $\sqrt{2} = (\sqrt{2}+i) - i \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + i)$.