F15-T1-A4

Sei J das von X^3-7 erzeugte Ideal in $\mathbb{Q}[X]$.

a) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q}[X]/J$ ein Körper ist, und bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{Q}[X]/J \supset \mathbb{Q}$.

b) Bestimmen Sie ein Polynom $P \in \mathbb{Q}[X]$, für das $P+J$ multiplikatives Inverses von $(X^2+1)+J$ in $\mathbb{Q}[X]/J$ ist.

Lösungsvorschlag. Zu a). Es ist $X^3-7 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel nach dem Eisensteinkriterium für die Primzahl 7 und dem Lemma von Gauß, somit ist $K := \mathbb{Q}[X]/J$ mit $J=(X^3-7)$ ein Körper. Der Grad $[K:\mathbb{Q}]$ ist 3, da K über $\mathbb{Q}$ von $[X]$ erzeugt wird, und nach Konstruktion X^3-7 das Minimalpolynom von $[X]$ ist. Insbesondere ist beispielsweise $1,[X],[X]^2$ eine Basis von K als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.
Zu b). Gesucht ist $P \in \mathbb{Q}[X]$ mit $[P]\cdot[X^2+1]=1 \in K$ (mit $K=\mathbb{Q}[X]/J$ wie in Teil a)). Ein allgemeines Element aus K hat die Form $[aX^2+bX+c]$ für $a,b,c \in \mathbb{Q}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}[aX^2+bX+c]\cdot[X^2+1] &= [aX^4+bX^3+cX^2+aX^2+bX+c] = \\ &= [(c+a)X^2+(b+7a)X+(c+7b)],\end{aligned}$$

wir können für $[P]$ also ablesen $c=-a$, $b=-7a$ und $c+7b=1$. Dies liefert $a=-1/50=-c$, $b=7/50$, also $P=-1/50X^2+7/50X+1/50$.
Alternative Möglichkeit: Systematischer, wenn auch etwas zeitaufwändiger, wäre die Verwendung des erweiterten euklidischen Algorithmus' gewesen:

$$\begin{aligned}
X^3-7 &= X(X^2+1)+(-X-7)\\
X^2+1 &= -X(-X-7)+(-7X+1)\\
\Leftrightarrow \quad -7X+1 &= X(X^3-7)+(1-X^2)(X^2+1)\\
-X-7 &= \frac{1}{7}(-7X+1)+\underbrace{\left(-7-\frac{1}{7}\right)}_{=-\frac{50}{7}}\\
\Leftrightarrow \quad -\frac{50}{7} &= -X-7-\frac{1}{7}(-7X+1) = \\
&= \left(1-\frac{1}{7}X\right)(X^3-7)+\left(\frac{1}{7}X^2-X-\frac{1}{7}\right)(X^2+1)
\end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit $-7/50$ erhalten wir also

$$1=\left(\frac{1}{50}X-\frac{7}{50}\right)(X^3-7)+\underbrace{\left(-\frac{1}{50}X^2+\frac{7}{50}X+\frac{1}{50}\right)}_{=:P}(X^2+1)$$