F15-T1-A3

Sei G eine Gruppe der Ordnung 105. Zeigen Sie:

a) G hat einen Normalteiler N mit $\#N = 5$ oder $\#N = 7$.

b) G ist auflösbar.

Lösungsvorschlag. Mit $|G| = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ erhalten wir durch die Sylowsätze:

- Anzahl der 5-Sylowgruppen $s_5 \equiv 1 \mod 5$ und $s_5|21$, also $s_5 \in \{1, 21\}$, und analog für die Anzahl der 7-Sylowgruppen $s_7 \equiv 1 \mod 7$ und $s_7|15$, also $s_7 \in \{1, 15\}$. Wir müssen also die Möglichkeit $s_5 = 21 \ \wedge s_7 = 15$ ausschließen.

- Da die 5-Sylowgruppen von Primordnung sind schneiden sich je zwei 5-Sylowgruppen trivial. Analog schneiden sich die 7-Sylowgruppen trivial und wegen $\mathrm{ggT}(5, 7) = 1$ schneiden sich je eine beliebige 5- und eine 7-Sylowgruppe trivial. Somit kämen wir im Fall $s_5 = 21 \ \wedge s_7 = 15$ auf $21 \cdot 4 = 84$ Elemente der Ordnung 5 in G und $15 \cdot 6 = 90$ Elemente der Ordnung 7. Dies ist aber ein Widerspruch zu $|G| = 105 < 174 = 84 + 90$.